Présentation

Tout d'abord je me présente.

Je m'appelle Sylvie Ruette. Je suis actuellement post-doctorante à l'Université Autonome de Barcelone. J'ai fait ma thèse à l'Institut de Mathématiques de Luminy, à Marseille, sous la direction de François Blanchard, et je l'ai soutenue novembre 2001.

Pendant ma thèse, j'ai été Allocataire Monitrice Normalienne pendant 3 ans, ce qui m'a donné l'occasion d'enseigner en DEUG lors de Travaux Dirigés.

Auparavent, j'ai été élève de l'École Normale Supérieure de Lyon et j'ai obtenu l'agrégation.

Publications

Mes travaux de recherche ont donné lieu à 5 articles ou preprints, dont 3 articles publiés ou acceptés pour publication dans *Israel Journal of Mathematics*, *Ergodic Theory and Dynamical Systems* et *Pacific Journal of Mathematics*. J'ai également écrit une courte note, à paraître dans *Proceedings of the AMS*.

De plus, j'ai écrit un livre sur le chaos pour les transformations de l'intervalle. Les travaux existant dans ce domaine sont nombreux, mais ils sont éparpillés dans la littérature, parfois mal connus ou publiés sans preuve. Le but de cet ouvrage est de rassembler ces résultats en donnant des preuves complètes, et de donner une vue d'ensemble sur ce sujet.

Système dynamique topologique

Mon domaine de recherche est la dynamique topologique en temps discret. Un système dynamique topologique est la donnée d'une transformation continue $f\colon X \to X$, où X est un espace métrique compact.

L'évolution du système est donnée par les itérations successives de la transformation f. Si on part du point x au temps 0, la nouvelle position au temps 1 est donnée par $f(x)$, au temps 2 on est en $f(f(x))$, etc.

On note f^n f composée n fois.

On cherche à étudier le comportement du système quand le temps n tend vers l'infini.

Par exemple, j'ai représenté ici la transformation $f(x) = 4x(1-x)$ sur l'intervalle $[0, 1]$. Si on part du point x ici, on a $f(x)$ ici, on le reporte sur l'axe horizontal à l'aide de la diagonal, on remonte pour avoir $f^2(x)$, etc.

Si on continue, on voit que la trajectoire se balade un peu partout et qu'elle est imprévisible à long terme. C'est ce type de comportement qu'on appelle le chaos.

Thèmes de recherche (hors transparent)

Pendant ma thèse, mes travaux ont porté essentiellement
– d'une part sur le chaos en dynamique topologique,
– d'autre part sur les mesures d'entropie maximale pour les transformations de l'intervalle.

Je m'intéresse actuellement aux transformations de graphe topologique et à la généralisation des nombres de rotation à ces systèmes.

Je vais maintenant présenter ces différentes thématiques.

Couples asymptotiques et entropie

On considère un système dynamique topologique donné par la transformation f sur un espace métrique compact.

On dit que les 2 points x, y forment un couple de Li-Yorke si $f^n(x)$ et $f^n(y)$ sont arbitrairement proches pour certains n et sont éloignés d'une certaine distance pour d'autres n. Autrement dit les 2 orbites font quelque chose comme ça. *(avec les mains)*

Ce sont des couples de points chaotiques car, si on connaît $f^n(x)$ on ne peut rien dire de la position de $f^n(y)$.

J'ai montré avec François Blanchard et Bernard Host que si tous les couples de points distincts sont des couples de Li-Yorke alors l'entropie topologique du système est nulle. Ce résultat a un côté paradoxal car on pourrait s'attendre à ce qu'un système n'ayant que des couples de Li-Yorke soit très chaotique, or l'entropie est une façon de mesurer la complexité d'un système.

Plus précisément nous avons montré le résultat suivant. Si l'entropie topologique du système est non nulle, alors par le principe variationnel il existe une mesure ergodique d'entropie non nulle. Et pour cette mesure presque tout point appartient à un couple asymptotique propre.

On dit que x et y forment un couple asymptotique propre s'ils sont distincts et si la distance entre $f^n(x)$ et $f^n(y)$ tend vers 0, autrement dit les 2 orbites ont le même comportement en $+\infty$.

De plus, si f est inversible, la plupart des couples asymptotiques pour f sont des couples de Li-Yorke pour f^{-1}, autrement dit les couples stables dans le futur sont instables dans le passé. Ce résultat rappelle les variétés stables et instables des Anosov, bien qu'ici on n'ait pas de structure différentielle.

La preuve de ce théorème repose sur des arguments ergodiques.

Huang et Ye ont montré que l'ensemble des couples asymptotiques est de 1ère catégorie dans le produit $X \times X$, donc il est petit. Par contre, ce théorème indique que sa projection sur X est gros, du moins en terme de mesure.

Mesures d'entropie maximale

Je vais maintenant parler de mesures d'entropie maximale pour les transformations de l'intervalle.

Une transformation de l'intervalle est une application continue de $[0,1]$ dans $[0,1]$. Une mesure d'entropie maximale est une mesure invariante μ dont l'entropie réalise le sup des entropies métriques. Par le principe variationnel, l'entropie de μ est égale à l'entropie topologique. Ainsi, une mesure d'entropie maximale représente toute la complexité topologique du système, et elle permet également de voir où se concentre cette complexité. C'est pour ça que ce type de mesure est intéressant.

Il n'existe pas toujours de mesures d'entropie maximale. On cherche donc à savoir dans quels cas il en existe une.

Pour cela, on va construire une chaîne de Markov topologique qui reflète l'essentiel de la dynamique de f.

Chaîne de Markov topologique

Qu'est-ce qu'une chaîne de Markov topologique ? C'est l'ensemble des chemins infinis sur un graphe orienté. Par exemple, pour ce graphe-ci on obtient la chaîne de Markov Γ_G ici, c'est l'ensemble des suites obtenues en suivant les flèches. C'est un système symbolique, mais sur un alphabet infini.

Les chaînes de Markov topologiques sont intéressantes car pour ces systèmes on connaît des conditions d'existence – ou de non existence – de mesures d'entropie maximale.

Par exemple, j'ai indiqué ici un critère géométrique dû à Salama. Ce théorème indique que si on peut inclure un graphe connexe G dans un graphe connexe strictement plus gros mais ayant la même entropie alors la chaîne de Markov topologique sur G n'a pas de mesure d'entropie maximale.

On peut appliquer ce critère au graphe dessiné au-dessus. *(superposer un transparent vierge)*. Si on ajoute un sommet et 2 arêtes comme ceci *(dessin)* alors on obtient un graphe strictement plus gros mais ayant la même entropie puisqu'il est identique au précédent par translation. On en déduit que ce graphe n'a pas de mesure d'entropie maximale.

Construction d'un diagramme de Markov

Je vais maintenant illustrer sur un exemple comment associer une chaîne de Markov topologique à une transformation de l'intervalle.

explication du dessin – orbite $x, f(x)\ldots \to$ chemin dans le graphe.

Cette représentation a d'abord été introduite par Hofbauer pour les transformations monotones par morceaux, puis elle a été généralisé par Jérôme Buzzi.

A l'aide de cette représentation, on peut en déduire des résultats pour les transformations de l'intervalle.

Résultats sur les mesures d'entropie maximale

Jérôme Buzzi a montré qu'une transformation C^∞ de l'intervalle a au moins une mesure d'entropie maximale, et si la transformation est transitive alors cette mesure est unique.

J'ai cherché à savoir si on pouvait affaiblir l'hypothèse de régularité. En fait ce n'est pas possible. J'ai construit des transformations de l'intervalle qui sont C^n, pour n fini aussi grand qu'on veut, transitives, mais qui n'ont pas de mesure d'entropie maximale.

Pour montrer l'absence de telle mesure, j'ai utilisé le théorème de Salama sur les surgraphes de même entropie que j'ai présenté un peu plus tôt.

Néanmoins la régularité permet de donner une condition suffisante d'existence. J'ai montré avec Jérôme Buzzi que si f est C^n et satisfait cette inégalité alors il existe une mesure d'entropie maximale, qui est unique dans le cas transitif.

Il est à noter que plus f est régulière plus cette quantité à droite est petite.

La preuve de ce théorème combine à la fois des propriétés liées à la dérivabilité et de nouveaux résultats sur les chaînes de Markov topologiques.

Nombres de rotation pour les transformations de graphe

Actuellement je travaille sur les transformations de graphes topologiques. Un graphe topologique est composé de cercles et de segments collés ensembles, comme ici.

Je m'intéresse aux graphes avec une seule boucle. Sur ces graphes, on peut définir le degré d'une transformation, comme sur le cercle, et pour les transformations de degré 1 on peut définir le nombre de rotation d'un point.

Pour cela, on développe le graphe par rapport à la boucle, comme ici, et on considère un relèvement de f, qu'on plonge dans $\mathbb{C}$ par commodité. On définit le nombre de rotation d'un point comme ceci.

Vu dans le relèvement, c'est la vitesse de fuite asymptotique vers l'infini du point $F^n(\hat{x})$. Vu dans le graphe de départ, c'est la vitesse de rotation asymptotique autour de la boucle de G.

Principaux résultats pour les nombres de rotation

L'ensemble de tous les nombres de rotation n'a pas de très bonnes propriétés, par contre le sous-ensemble des nombres de rotation des points appartenant à la boucle a des propriétés similaires à l'intervalle de rotation d'une application du cercle.

Je note R cet ensemble.

Tout d'abord c'est un intervalle fermé.

Ensuite, si x est un point périodique, son nombre de rotation est un rationnel. Réciproquement, si p/q est un rationnel dans R alors il existe un point périodique dont le nombre de rotation est p/q.

Plus précisément, si p/q est à l'intérieur de R, c'est-à-dire pas sur une des extrémités, alors pour tout n assez grand il existe un point périodique de période nq de nombre de rotation p/q. Pour le cercle, on obtient tous les multiples de q ; ici il peut en manquer certains, mais on les obtient tous à partr d'un certain rang.

L'intervalle R est a priori est un sous-ensemble des nombres de rotation. Mais si l'union des images de la boucle par f^n est dense dans le graphe alors R est égal à l'ensemble de tous les nombres de rotation de la transformation. C'est en particulier le cas quand f est transitive.

Ces travaux sont encore en cours, notamment il reste à étudier ce qui se passe en dehors de R quand cette dernière hypothèse n'est pas satisfaite.

Quelques directions de recherche

Pour terminer, voici quelques directions dans lesquelles j'envisage de poursuivre mes recherches.

— En dynamique topologique, il reste à étudier les relations entre certaines propriétés liées au chaos. Ce domaine nécessite souvent des outils variés, dont la dynamique symbolique et la théorie ergodique.

— J'aimerais poursuivre l'étude des transformations de l'intervalle, et notamment les mesures absolument continues qui, comme les mesures d'entropie maximale, ont un rapport étroit avec le caractère dérivable.

— En dimension supérieure, il existe aussi une représentation par chaînes de Markov topologiques, sous certaines hypothèses. J'aimerais utiliser cette représentation pour étudier les mesures d'entropie maximale mais aussi d'autres propriétés comme les points périodiques.