Sylvie Ruette

Post-doc à l'Université de Barcelone

Formation

1998-2001 : thèse à l'IML (Marseille).
Directeur : F. Blanchard.

Chaos en dynamique topologique, en particulier sur l'intervalle, mesures d'entropie maximale.

1998 : agrégation (31ème).
1995-1999 : ENS Lyon.

Enseignement

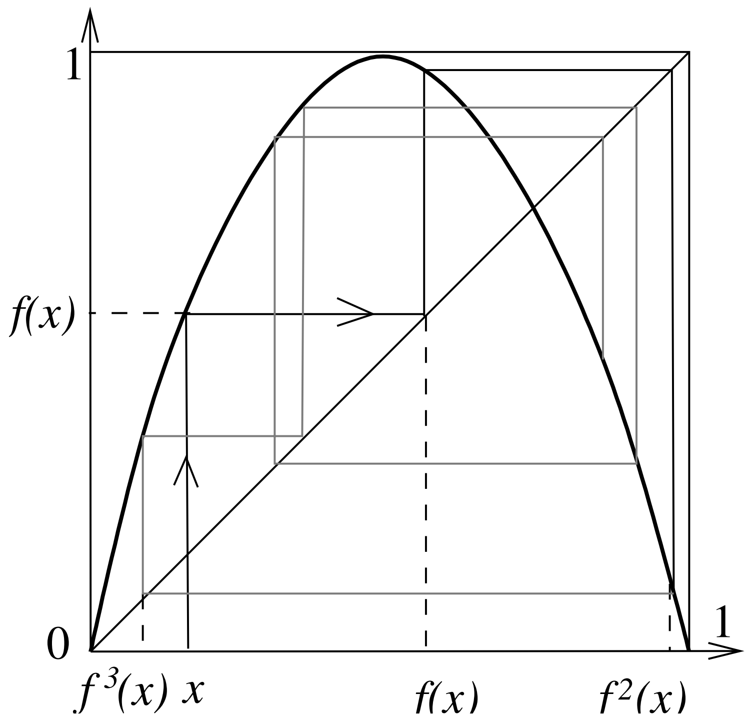
1999-2002 : monitorat.
64 h/an de TD en DEUG MIAS ou SM
(techniques de calcul, algèbre linéaire).

Un **système dynamique topologique** est la donnée d'une transformation continue $f\colon X \to X$, où X est métrique compact.

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}.$$

On cherche à étudier le comportement de f^n quand le temps n tend vers l'infini.

Exemple : $X = [0,1]$, $f(x) = 4x(1-x)$.



Couples asymptotiques et entropie

(x, y) est un **couple de Li-Yorke** si

$$\liminf_{n\to+\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0,$$

$$\limsup_{n\to+\infty} d(f^n(x), f^n(y)) > 0.$$

(x, y) est un **couple asymptotique** si

$$\lim_{n\to+\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0.$$

Théorème (Blanchard, Host, R.)
Si pour tous $x \neq y$, (x, y) est un couple de Li-Yorke alors $h_{top}(f) = 0$.

Plus précisément, si μ est une mesure ergodique d'entropie non nulle, alors presque tout point appartient à un couple asymptotique propre. De plus, la plupart des couples asymptotiques pour f sont Li-Yorke pour f^{-1}.

Mesures d'entropie maximale pour les transformations de l'intervalle

Soit $f\colon [0,1] \to [0,1]$ continue.

μ est une mesure d'entropie maximale si

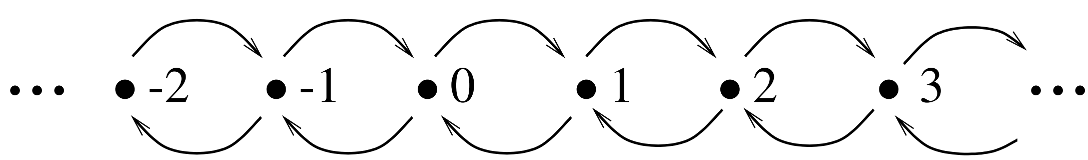
$$h_\mu(f) = \sup\{h_\nu(f) \mid \nu \text{ mesure invariante}\}.$$

Par le principe variationnel, $h_\mu(f) = h_{top}(f)$.

Question : dans quel cas existe-t-il une mesure d'entropie maximale ?

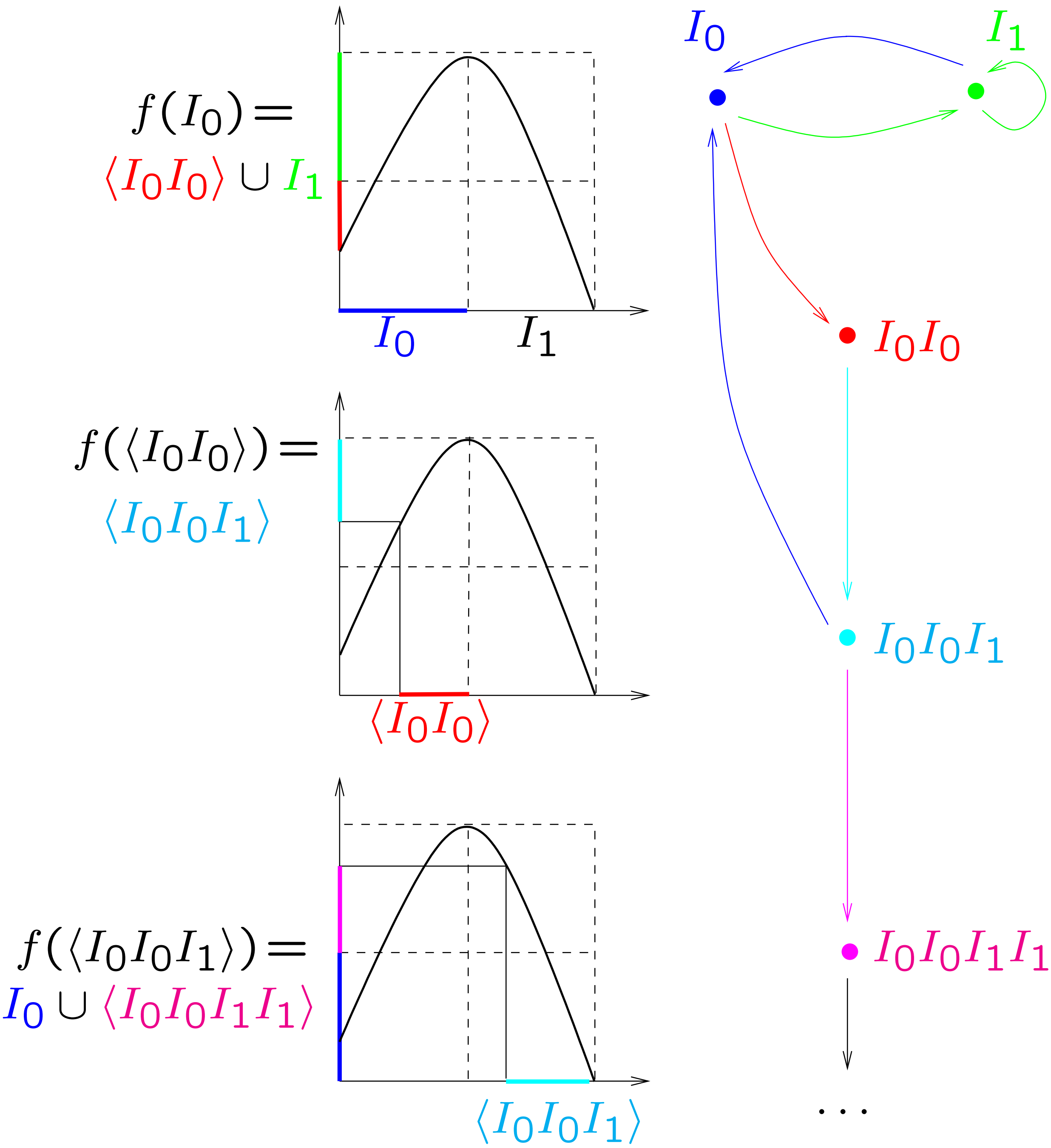
Outil principal : chaînes de Markov topologiques.

Exemple :



$$\Gamma_G = \left\{(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid u_n \in \mathbb{Z}, |u_{n+1} - u_n| = 1\right\}$$

Exemple :



$f(I_0) =$
$\langle I_0 I_0 \rangle \cup I_1$
I_0
I_1
$f(\langle I_0 I_0 \rangle) =$
$\langle I_0 I_0 I_1 \rangle$
$\langle I_0 I_0 \rangle$
$f(\langle I_0 I_0 I_1 \rangle) =$
$I_0 \cup \langle I_0 I_0 I_1 I_1 \rangle$
$\langle I_0 I_0 I_1 \rangle$
I_0
I_1
$I_0 I_0$
$I_0 I_0 I_1$
$I_0 I_0 I_1 I_1$
$\dots$

Résultats antérieurs

Théorème (Buzzi) Si $f\colon [0,1] \to [0,1]$ est C^∞ alors il existe une mesure d'entropie maximale. Si de plus f est transitive alors cette mesure est unique.

Nouveaux résultats

Théorème (R.) Pour tout entier n il existe une transformation $f\colon [0,1] \to [0,1]$ qui est C^n, transitive, sans mesure d'entropie maximale.

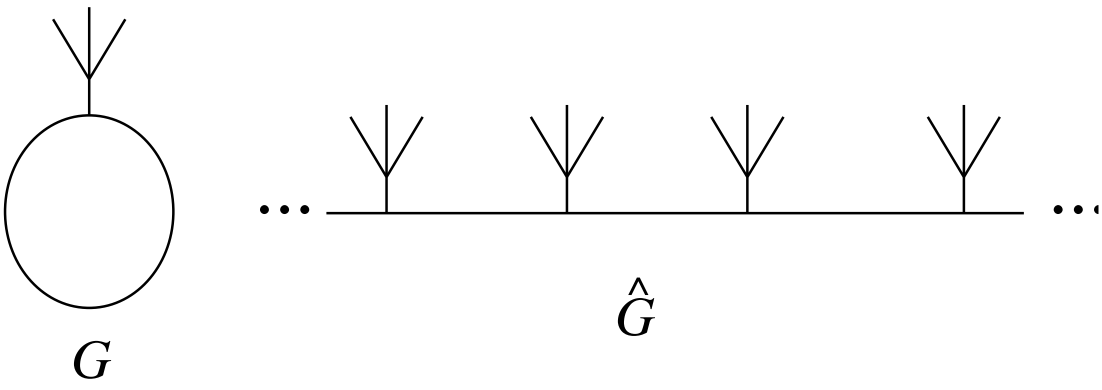
Théorème (Buzzi, R.) Si $f\colon [0,1] \to [0,1]$ est C^n et

$$h_{top}(f) > \frac{2}{n} \log \|f'\|_\infty$$

alors il existe une mesure d'entropie maximale. Si de plus f est transitive cette mesure est unique.

Nombres de rotation pour les transformations de graphe

Soit G un graphe topologique avec une seule boucle, $f\colon G \to G$ continue de degré 1 et $F\colon \widehat{G} \to \widehat{G}$ son relèvement ($\widehat{G} \subset \mathbb{C}$).



Nombre de rotation de $x \in G$:

$$\rho(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{F^n(\widehat{x}) - \widehat{x}}{n} \in \mathbb{R}.$$

Principales propriétés de l'ensemble des nombres de rotation

Soit $R = \{\rho(x) \mid x \in S\}$ où S est l'unique boucle du graphe.

– R est un intervalle fermé.

– Si $p/q \in R$ il existe un point périodique x avec $\rho(x) = p/q$.

– Si f transitive alors $R = \{\rho(x) \mid x \in G\}$.

Quelques directions de recherche

– Mieux comprendre le chaos en dynamique topologique.

– Mesures absolument continues pour les transformations de l'intervalle.

– Utiliser la représentation par chaînes de Markov topologiques en dimension supérieure.