# Sylvie Ruette

Post-doc à l'Université de Barcelone

## Formation

1998-2001 : thèse à l'IML (Marseille).
Directeur : F. Blanchard.

*Chaos en dynamique topologique, en particulier sur l'intervalle, mesures d'entropie maximale.*

1998 : agrégation (31ème).
1995-1999 : ENS Lyon.

## Enseignement

1999-2002 : monitorat.
64 h/an de TD en DEUG MIAS ou SM (techniques de calcul, algèbre linéaire).

# Publications

## Articles publiés ou acceptés

[1] Ruette. Mixing $C^r$ maps of the interval without maximal measure, *Israel J. Math.*, **127**, 253–277, 2002.

[2] Blanchard, Host, Ruette. Asymptotic pairs in positive-entropy systems, *Erg. Th. Dyn. Sys.*, **22**, 671–686, 2002.

[3] Ruette. On the Vere-Jones classification and existence of maximal measure for topological Markov chains, à paraître dans *Pacific J. Math.*

[4] Ruette. $C^n$ interval maps not Borel conjugate to any $C^\infty$ maps, note à paraître dans *Proc. Amer. Math. Soc.*

## Articles soumis ou preprints

[5] Buzzi, Ruette. Large topological entropy implies existence of measures of maximal entropy : the case of interval maps, soumis à *Trans. Amer. Math. Soc.*

[6] Ruette. Transitive, sensitive subsystems for interval maps, Preprint UAB.

## Livre (preprint)

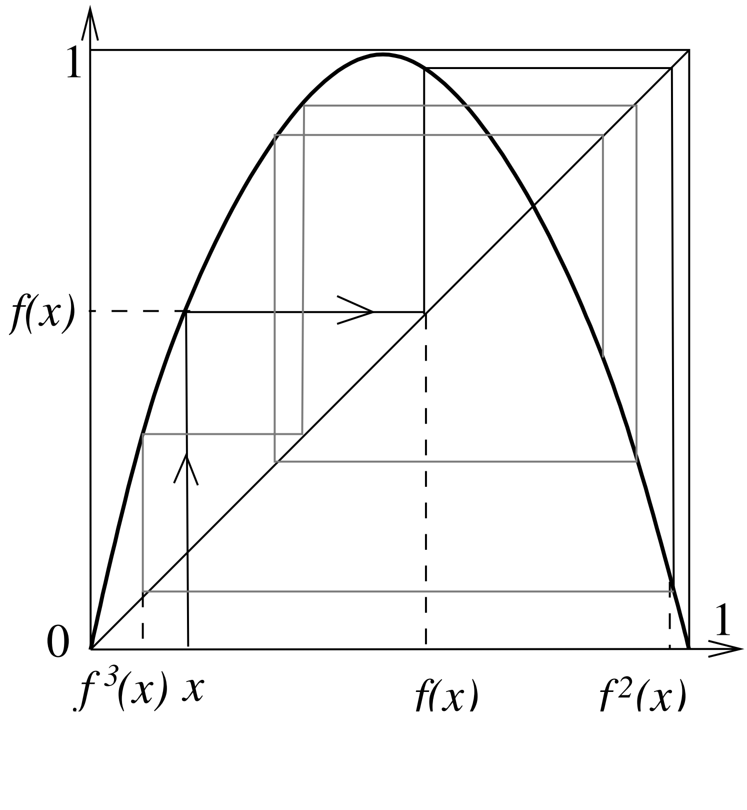
[7] Ruette. *Chaos for continuous interval maps*, preprint.

Un **système dynamique topologique** est la donnée d'une transformation continue $f\colon X \to X$, où $X$ est métrique compact.

$$f^n = \underbrace{f \circ f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ fois}}.$$

On cherche à étudier le comportement de $f^n$ quand le temps $n$ tend vers l'infini.

**Exemple :** $X = [0, 1]$, $f(x) = 4x(1 - x)$.



# Couples asymptotiques et entropie

Soit $f\colon X \to X$ continue, $X$ métrique compact.

$(x, y)$ est un **couple de Li-Yorke** si

$$\liminf_{n\to+\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0,$$

$$\limsup_{n\to+\infty} d(f^n(x), f^n(y)) > 0.$$

$(x, y)$ est un **couple asymptotique** si

$$\lim_{n\to+\infty} d(f^n(x), f^n(y)) = 0.$$

**Théorème (Blanchard, Host, R.)**
Si pour tous $x \neq y$, $(x, y)$ est un couple de Li-Yorke alors $h_{top}(f) = 0$.

Plus précisément, si $\mu$ est une mesure ergodique d'entropie non nulle, alors presque tout point appartient à un couple asymptotique propre. De plus, la plupart des couples asymptotiques pour $f$ sont Li-Yorke pour $f^{-1}$.

# Mesures d'entropie maximale pour les transformations de l'intervalle

Soit $f\colon [0,1] \to [0,1]$ continue.

$\mu$ est une mesure d'entropie maximale si

$$h_\mu(f) = \sup\{h_\nu(f) \mid \nu \text{ mesure invariante}\}.$$

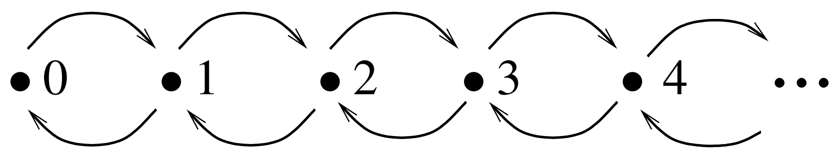
Par le principe variationnel, $h_\mu(f) = h_{top}(f)$.

**Question :** dans quel cas existe-t-il une mesure d'entropie maximale ?

**Outil principal :** chaînes de Markov topologiques.

Une chaîne de Markov topologique est l'ensemble des chemins infinis sur un graphe orienté dénombrable.

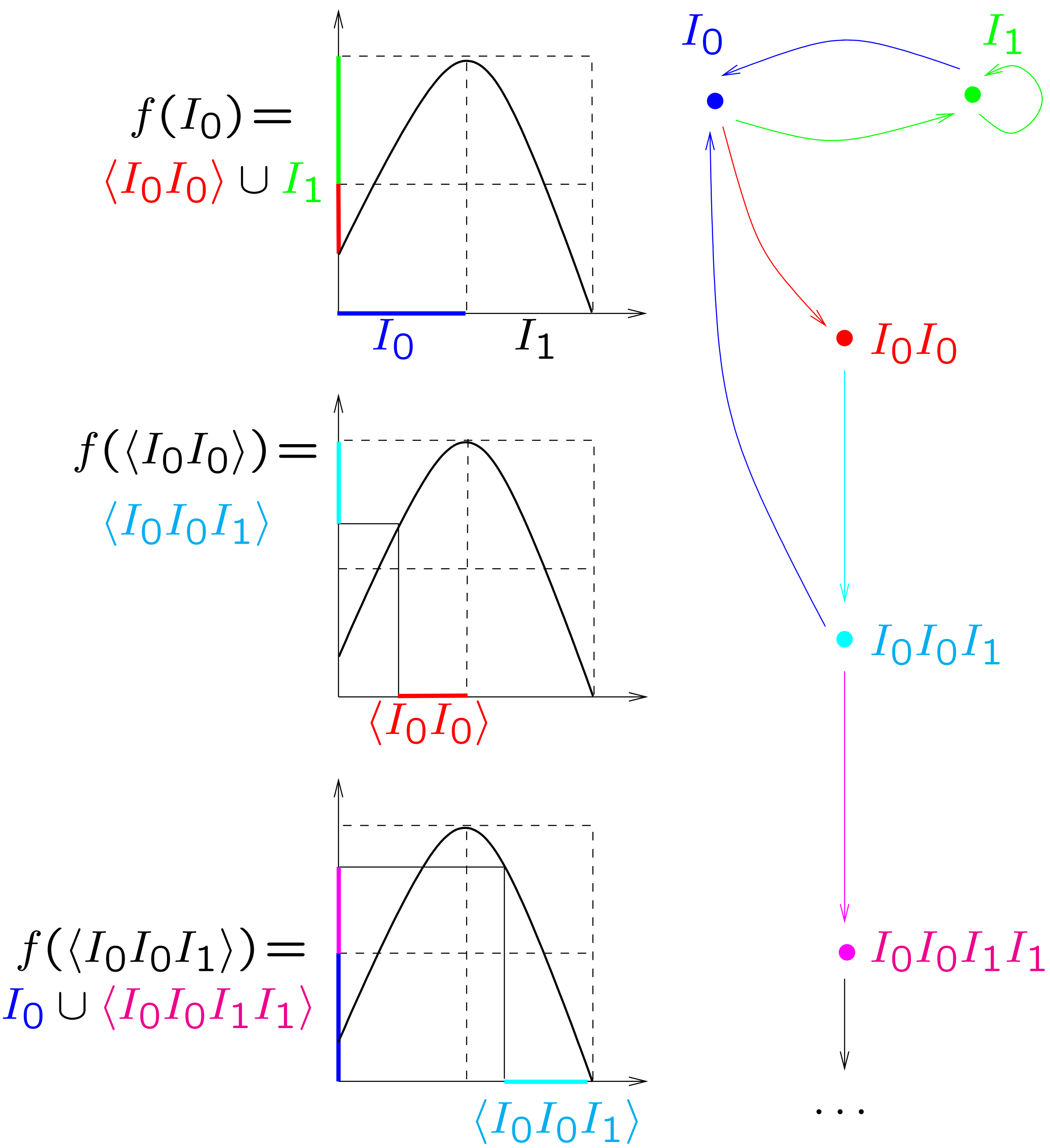
**Exemple :**




$$\Gamma_G = \left\{ (u_n)_{n\in\mathbb{Z}} \mid u_n \in \mathbb{N}, |u_{n+1} - u_n| = 1 \right\}$$

**Théorème (Salama)**
Soit $G, H$ deux graphes orientés connexes tels que $G \subsetneq H$. Si $h(H) = h(G)$ alors la chaîne de Markov topologique sur $G$ n'a pas de mesure d'entropie maximale.

**Exemple :**



$f(I_0) =$
$\langle I_0 I_0 \rangle \cup I_1$
$I_0$
$I_1$
$f(\langle I_0 I_0 \rangle) =$
$\langle I_0 I_0 I_1 \rangle$
$\langle I_0 I_0 \rangle$
$f(\langle I_0 I_0 I_1 \rangle) =$
$I_0 \cup \langle I_0 I_0 I_1 I_1 \rangle$
$\langle I_0 I_0 I_1 \rangle$
$I_0$
$I_1$
$I_0 I_0$
$I_0 I_0 I_1$
$I_0 I_0 I_1 I_1$
$\dots$

# Résultats antérieurs

**Théorème (Buzzi)** Si $f\colon [0,1] \to [0,1]$ est $C^\infty$ alors il existe une mesure d'entropie maximale. Si de plus $f$ est transitive alors cette mesure est unique.

# Nouveaux résultats

**Théorème (R.)** Pour tout entier $n$ il existe une transformation $f\colon [0,1] \to [0,1]$ qui est $C^n$, transitive, sans mesure d'entropie maximale.

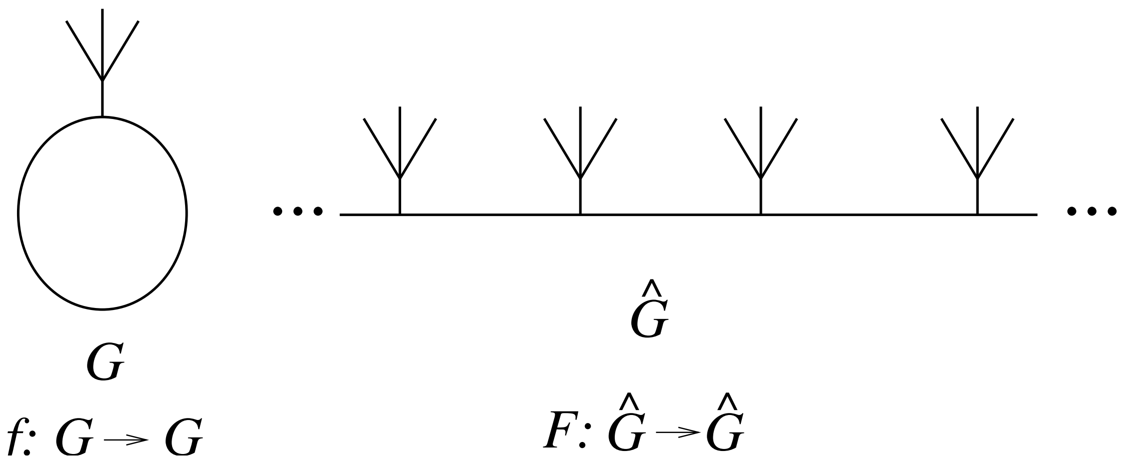
**Théorème (Buzzi, R.)** Si $f\colon [0,1] \to [0,1]$ est $C^n$ et

$$h_{top}(f) > \frac{2}{n} \log \|f'\|_\infty$$

alors il existe une mesure d'entropie maximale. Si de plus $f$ est transitive cette mesure est unique.

# Nombres de rotation pour les transformations de graphe

Soit $G$ un graphe topologique avec une seule boucle, $f\colon G \to G$ continue de degré 1 et $F\colon \widehat{G} \to \widehat{G}$ son relèvement ($\widehat{G} \subset \mathbb{C}$).




Nombre de rotation de $x \in G$ :

$$\rho(x) = \lim_{n \to +\infty} \frac{F^n(\widehat{x}) - \widehat{x}}{n} \in \mathbb{R}.$$

## Principales propriétés de l'ensemble des nombres de rotation

Soit $R = \{\rho(x) \mid x \in S\}$ où $S$ est l'unique boucle du graphe.

– $R$ est un intervalle compact.

– Si $p/q \in R$, il existe un point périodique $x$ avec $\rho(x) = p/q$.

– Si $p/q \in \mathrm{Int}(R)$, $\exists N$, $\forall n \geq N$, il existe un point périodique $x$ de période $nq$ avec $\rho(x) = p/q$.

– Si $\overline{\bigcup_{n\geq 0} f^n(S)} = G$ alors $R = \{\rho(x) \mid x \in G\}$.

## Quelques directions de recherche

– Mieux comprendre le chaos en dynamique topologique.

– Mesures absolument continues pour les transformations de l'intervalle.

– Utiliser la représentation par chaînes de Markov topologiques en dimension supérieure.