Feuille d'Exercices 3

Équations différentielles à variables séparables

Exercice 3.1.— On s'intéresse à l'équation différentielle $y' = y^2$.

1. Montrer que la fonction nulle est solution de cette équation. En déduire que les autres solutions ne s'annulent pas.

2. Résoudre l'équation (vérifier vos solutions !). Pour chaque solution de l'équation, indiquer son intervalle de vie. Tracer l'allure de quelques solutions.

Exercice 3.2.— On s'intéresse à l'équation différentielle $y' = xy^3$.

1. Montrer que la fonction nulle est solution de cette équation. En déduire que les autres solutions ne s'annulent pas.

2. Résoudre l'équation (vérifier vos solutions !). Pour chaque solution de l'équation, indiquer son intervalle de vie. Tracer l'allure de quelques solutions.

Exercice 3.3.— On considère l'équation différentielle $x^3y' = y^2$.

1. Montrer que la fonction nulle est solution de l'équation. Pourquoi ne peut-on pas appliquer Cauchy-Lipschitz ?

2. Étude de l'équation sur $]0, +\infty[$.

a) Montrer qu'une solution de l'équation sur $]0, +\infty[$ distincte de la fonction nulle ne s'annule jamais.

b) Résoudre l'équation sur $]0, +\infty[$ (vérifier vos solutions !).

c) Soit f la solution de l'équation sur $]0, +\infty[$ qui satisfait à la condition initiale $f(1) = -1$. Quel est l'intervalle de vie de f ? Tracer l'allure de son graphe.

d) Soient g_1 et g_2 les solutions de l'équation sur $]0, +\infty[$ qui satisfont aux conditions initiales $g_1(1) = 1$ et $g_2(1) = 2$. Vérifier que g_1 et g_2 sont définies (au moins) sur $]0, +\infty[$. Tracer l'allure de leurs graphes.

3. Étude de l'équation sur $\mathbb{R}$.

a) Montrer que les formules qui définissent les fonctions g_1 et g_2 satisfont en fait à l'équation différentielle sur $\mathbb{R}$ en entier. On notera encore g_1 et g_2 les fonctions définies sur $\mathbb{R}$ tout entier par ces formules.

b) Que valent $g_1(0)$ et $g_2(0)$? Comparer au théorème de Cauchy-Lipschitz.

c) Existe-t-il une solution de l'équation qui satisfait à la condition initiale $y(0) = 1$?

Exercice 3.4.— On considère l'équation différentielle $yy' = 1$.

1. Montrer qu'une solution de l'équation ne s'annule jamais.

2. Résoudre l'équation avec la condition initiale $y(0) = 1$ (vérifier la solution obtenue). Quelle est l'intervalle de vie de cette solution ?

3. Mêmes questions avec la condition initiale $y(0) = -2$.

4. Trouver toutes les solutions de l'équation, et en tracer quelques unes.

* **Exercice 3.5.**— On considère l'équation différentielle $y' = xy$.

1. Montrer que la fonction nulle est solution de l'équation. En déduire que les autres solutions ne s'annulent pas.

2. Résoudre l'équation quand $y > 0$, puis quand $y < 0$. En déduire que l'ensemble des solutions de l'équation est l'ensemble des fonctions de la forme $\lambda\varphi(x)$, où $\lambda \in \mathbb{R}$ est une constante quelconque et φ est une fonction qu'on précisera. Tracer le graphe de quelques solutions.

** **Exercice 3.6.**— On considère l'équation différentielle $y' = 2x(e^y - 1)$.

1. Montrer que la fonction nulle est solution de l'équation. En déduire que, pour les autres solutions, $e^y - 1$ ne s'annule pas.

2. Calculer une primitive G de la fonction $g(t) = \frac{1}{e^t - 1}$ sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$ et $]0, +\infty[$ (*indication : on pourra multiplier le numérateur et le dénominateur par* e^{-t}).

3. En déduire la forme de $G(y)$ si y est une solution non nulle.

4. Montrer que G définit une bijection de $]0, +\infty[$ sur son image et calculer son inverse. En déduire la forme des solutions strictement positives. Quelle est la solution vérifiant la condition initiale $y(0) = \ln 2$?

5. De même, montrer que G définit une bijection de $]-\infty, 0[$ sur son image et calculer son inverse. En déduire la forme des solutions strictement négatives.