Feuille d'Exercices 6

Équations différentielles linéaires d'ordre 2

Exercice 6.1.— On considère une équation différentielle linéaire d'ordre 1 sans second membre :

$$(E) \qquad ay'' + by' + cy = 0$$

avec $a, b, c \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. On note $\Delta = b^2 - 4ac$.

1. Montrer que, si f_1 et f_2 sont des solutions de (E) alors, pour tous $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, $\alpha f_1 + \beta f_2$ est aussi une solution de (E).

2. Trouver toutes les solutions de (E) de la forme $x \mapsto e^{\lambda x}$.

3. On se place dans le cas $\Delta = 0$. Soit λ_0 l'unique racine du polynôme $aX^2 + bX + c$. Montrer que la fonction $x \mapsto xe^{\lambda_0 x}$ est une solution de (E).

4. On se place dans le cas $\Delta < 0$. Soit $\lambda + i\omega$ et $\lambda - i\omega$ les deux racines complexes du polynôme $aX^2 + bX + c$.

a. Calculer les parties relle et imaginaire de $az^2 + bz + c$ quand $z = x + iy$ $(x, y \in \mathbb{R})$.

b. Montrer que les fonctions $f_1 : x \mapsto \cos(\omega x)e^{\lambda x}$ et $f_2 : x \mapsto \sin(\omega x)e^{\lambda x}$ sont solutions de (E).

Exercice 6.2.— On considère une équation différentielle linéaire d'ordre 1 sans second membre :

$$(E) \qquad y'' + by' + cy = 0$$

avec $b, c \in \mathbb{R}$ $(a = 1)$. On note $\Delta = b^2 - 4c$.

1. On se place dans le cas $\Delta > 0$. On note λ_1, λ_2 les racines du polynôme $X^2 + bX + c$.

a. Exprimer $\lambda_1 + \lambda_2$ en fonction de b et c.

b. Soit $f_1 : x \mapsto e^{\lambda_1 x}$ et $f_2 : x \mapsto e^{\lambda_2 x}$. On considère une fonction f de la forme $f(x) = A(x)f_1(x)$. Quelle équation différentielle doit satisfaire A pour que f soit solution de (E) ? Résoudre cette équation. En déduire que toutes les solutions de (E) sont de la forme $\alpha f_1 + \beta f_2$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

2. On se place dans le cas $\Delta = 0$. On note λ_0 l'unique racine du polynôme $X^2 + bX + c$.

a. Exprimer λ_0 en fonction de b et c.

b. Soit $f_0 : x \mapsto e^{\lambda_0 x}$. On considère une fonction f de la forme $f(x) = A(x)f_0(x)$. Quelle équation différentielle doit satisfaire A pour que f soit solution de (E) ? Résoudre cette équation. En déduire que toutes les solutions de (E) sont de la forme $(\alpha + \beta x)f_0$ avec $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

Exercice 6.3.— Résoudre les équations différentielles suivantes :

1. $y'' - 3y' + 2y = 0$.
2. $y'' - 3y' + 2y = e^{3x}$ (on pourra chercher une solution particulière sous la forme $f_0(x) = Ae^{3x}$).
3. $y'' - 3y' + 2y = e^{2x}$ (on pourra chercher une solution particulière sous la forme $f_0(x) = Axe^{2x}$).
4. $y'' - 6y' + 9y = 0$.
5. $2y'' + 2y' + y = xe^{-x}$ (on pourra chercher une solution particulière sous la forme $f_0(x) = (Ax + B)e^{-x}$).

Exercice 6.4.— **Équations du second ordre et conditions initiales** On considère l'équation différentielle

$$(E) \qquad y'' + y' + y = 0$$

1. Trouver toutes les solutions de (E) qui vérifient la condition initiale $y(0) = 1$.

2. Trouver toutes les solutions de (E) qui vérifient la condition initiale $y'(0) = 1$.

3. Trouver toutes les solutions de (E) qui vérifient la condition initiale $y(0) = 1$ et $y'(0) = 1$.