Devoir maison

à rendre en cours le vendredi 1er avril 2016

Le but de ce problème est d'étudier le système dynamique donné par la fonction

$$f\colon [0,1] \to [0,1] \quad \text{avec} \begin{cases} f(x) = 2x & \text{si} \quad 0 \leq x \leq 1/2 \\ f(x) = 2-2x & \text{si} \quad 1/2 < x \leq 1 \end{cases}$$

Remarque : f est surnommée "application tente" en raison de la forme de son graphe.

Si besoin, on pourra admettre certaines questions pour faire la suite du problème.

Notations.
Si a, b sont des points de $[0,1]$, l'intervalle fermé d'extrémités a et b sera noté $\langle a, b\rangle$, c'est-à-dire $\langle a, b\rangle = [a, b]$ si $a \leq b$ et $\langle a, b\rangle = [b, a]$ si $b \leq a$. La longueur de l'intervalle $\langle a, b\rangle$ est $|b-a|$.

f^0 désigne l'identité ($f^0(x) = x$ est le premier point de la trajectoire de x).

Si E est un ensemble, $f(E) = \{f(x) \mid x \in E\}$.

Problème.

1. Vérifier que f est continue et tracer son graphe. Quels sont les points fixes de f ?

2. Soit a, b deux points de $[0,1]$ avec $a \leq b$. Montrer que si a, b sont tous les deux dans $[0, 1/2]$ alors $f([a, b])$ est l'intervalle $\langle f(a), f(b)\rangle$ et que sa longueur est $2(b-a)$. Montrer qu'on a la même propriété si a, b sont tous les deux dans $[1/2, 1]$.

3. Soit a, b deux points de $[0,1]$ avec $a < b$. On pose $I = [a, b]$. Montrer que $f(I)$ est un intervalle compact, et que sa longueur est non nulle *(on pourra distinguer plusieurs cas selon les positions de a et b)*. En déduire que, pour tout entier $n \geq 0$, $f^n(I)$ est un intervalle compact de longueur non nulle.

4. Soit I un intervalle compact de longueur non nulle inclus dans $[0,1]$.
a) Montrer qu'il existe un entier $n \geq 0$ tel que $f^n(I)$ est un intervalle contenant $1/2$.
Indication : on pourra faire une preuve par l'absurde et utiliser la question 2.
b) En déduire qu'il existe un entier $m \geq 1$ tel que $f^m(I)$ est un intervalle contenant 0.
c) Montrer qu'il existe un entier $p \geq 1$ tel que $f^p(I) = [0,1]$.
Indication : on pourra appliquer a) à l'intervalle trouvé en b).

5. En utilisant la question 4.c), montrer que f est sensible aux conditions initiales.

Questions facultatives (non notées)
Les deux questions suivantes ne comptent pas pour la note du devoir. Il n'est pas obligatoire de les faire, c'est uniquement pour ceux que ça intéresse.

6. Soit $\varphi\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue et a, b deux points de $[0,1]$ avec $a < b$. Montrer que si $\varphi([a, b])$ contient $[a, b]$, alors il existe $x \in [a, b]$ tel que $\varphi(x) = x$.
Indication : on pourra introduire des points $x_0, x_1 \in [a, b]$ tels que $\varphi(x_0) = a$ et $\varphi(x_1) = b$

7. Soit a, b deux points de $[0,1]$ avec $a < b$.
a) Montrer que l'intervalle $[a, b]$ contient un point qui est périodique pour f.
Indication : on pourra utiliser les questions 4.c) et 6.
b) En déduire que l'ensemble des points périodiques de f est dense dans $[0,1]$.

Remarque : Cette fonction a d'autres propriétés, qui ne sont pas étudiée dans ce problème ; en particulier, il existe un point dont la trajectoire est dense (ce qui découle – de façon non évidente – de la propriété démontrée en 4.c).