Feuille d'exercices n° 3

Exercice 1. On considère $\sigma\colon \Sigma \to \Sigma$.
Parmi les éléments de Σ, notons X l'ensemble des suites $(a_n)_{n\geq 0}$ telles que $a_0 = 1, a_1 = 0$.
Donner tous les points périodiques de période 4 dans X.

Exercice 2. On considère $\sigma\colon \Sigma \to \Sigma$.
Parmi les éléments de Σ, notons Σ' l'ensemble des suites $(a_n)_{n\geq 0}$ telles que

$$\text{si } a_n = 0, \text{ alors } a_{n+1} = 1, a_{n+2} = 1.$$

a) Montrer que $\sigma(\Sigma') \subset \Sigma'$ (de sorte que $\sigma\colon \Sigma' \to \Sigma'$ est un système dynamique).
b) Combien y a-t-il de points fixes dans Σ' ? Déterminez-les.
c) Même question que b) pour les points périodiques de période 2, 3, 4, 5.

Exercice 3. On considère la fonction $T\colon [0,1] \to [0,1]$ (appelée la fonction tente) définie par

$$T(x) = \begin{cases} 2x & \text{si} \quad x \in [0, 1/2] \\ 2-2x & \text{si} \quad x \in [1/2, 1] \end{cases}$$

Pour tout x dans $[0,1]$ avec $x \neq \frac{1}{2}$, on pose

$$s(x) = 0 \text{ si } x \in [0, 1/2[\,,\ s(x) = 1 \text{ si } x \in\,]1/2, 1]\,.$$

On définit le codage de x par $S(x) = (s(T^n(x))_{n\geq 0} = (s(x), s(T(x)), \ldots, s(T^{n-1}(x)), \ldots)$ quand cette suite est bien définie, c'est-à-dire $T^n(x) \neq \frac{1}{2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.

a) Soit $x_0 = 0.27$. Donner les 4 premiers éléments du codage de x_0 (c'est-à-dire $s(x_0)$, $s(T(x_0))$, $s(T^2(x_0))$, $s(T^3(x_0))$).
b) Combien y a-t-il de points périodiques de période 2 ? Donner leur codage, puis leur valeur.

Exercice 4. Soit $f\colon [0,1] \to [0,1]$ la fonction définie par :

$$f(0) = 0,\ f(1/2) = 1,\ f(7/8) = 1/2,\ f(1) = 0,$$

et telle que f est continue sur $[0,1]$ et affine par morceaux (c'est-à-dire affine sur chacun des intervalles $[0, \frac{1}{2}], [\frac{1}{2}, \frac{7}{8}], [\frac{7}{8}, 1]$).
a) Calculer la pente de f sur chacun des intervalles $[0, \frac{1}{2}], [\frac{1}{2}, \frac{7}{8}], [\frac{7}{8}, 1]$.
b) Montrer que f est chaotique.
c) Donner les 2 premiers chiffres du codage des points $x \in [\frac{1}{2}, \frac{7}{8}]$. Même question pour $[\frac{7}{8}, 1]$.
Trouver un réel $a \in]0, \frac{1}{2}[$ tel que le codage de tous les points de $[0, a]$ (respectivement $[a, \frac{1}{2}]$) commencent par les mêmes 2 premiers chiffres ; donner les 2 premiers chiffres du codage pour $x \in [0, a]$ et pour $x \in [a, \frac{1}{2}]$.
d) Combien y a-t-il de points fixes ? Donner leur codage, puis leur valeur.
e) Existe-t-il un point périodique de période 2 dans $[\frac{1}{2}, \frac{7}{8}]$?