Corrigé de l'examen du 13 mai 2016

Exercice 1.

a) f est dérivable et $f'(x) = x + \frac{1}{2}$. D'où le tableau de variations suivant :

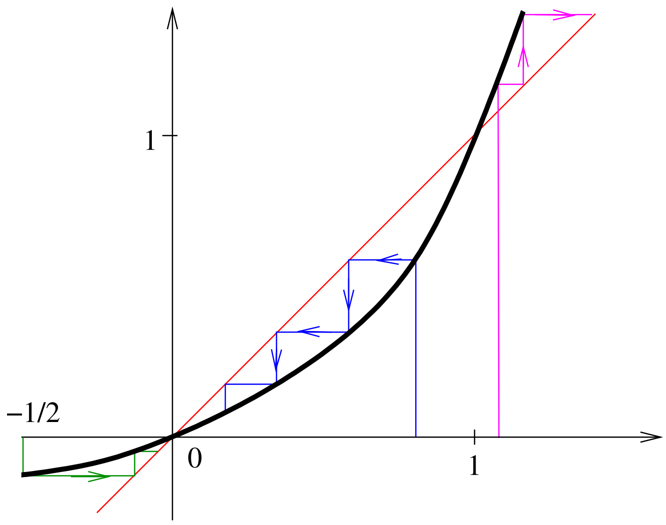
	$-\infty$		$-1/2$		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$-1/8$	$\nearrow$	

b) $f(x) - x = \frac{1}{2}(x^2 - x) = \frac{1}{2}x(x-1)$. Donc $f(x) - x = 0$ si et seulement si $x = 0$ ou $x = 1$. Donc f a deux points fixes : 0 et 1.
$f'(0) = \frac{1}{2} \in]-1, 1[$, donc 0 est un point fixe attractif.
$f'(1) = \frac{3}{2} > 1$, donc 1 est un point fixe répulsif.

c) Vu le tableau de variations, f est strictement croissante sur $[-\frac{1}{2}, +\infty[$.
De plus, $f(-\frac{1}{2}) = -\frac{1}{8} \geq -\frac{1}{2}$. Donc $f([-\frac{1}{2}, +\infty[) \subset [-\frac{1}{2}, +\infty[$.
$f(x) - x = \frac{1}{2}x(x-1)$. Comme l'expression est factorisée, on en déduit le signe de $f(x) - x$:

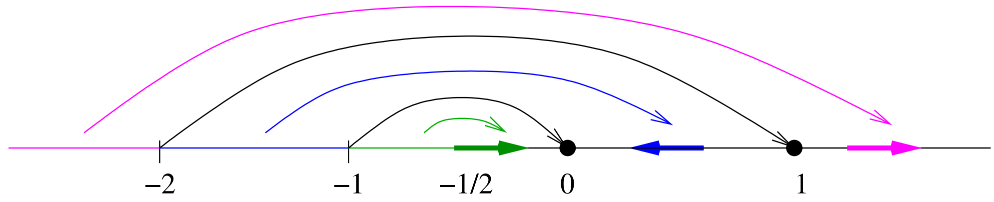
	$-1/2$		0		1		$+\infty$
$f(x) - x$		$+$	0	$-$	0	$+$	

d) f est strictement croissante sur $[-\frac{1}{2}, +\infty[$ (question a), $f([-\frac{1}{2}, +\infty[) \subset [-\frac{1}{2}, +\infty[$ (question c) et on connaît la position du graphe de f par rapport à la droite $y = x$ (signe de $f(x) - x$, question c). On peut donc faire une analyse graphique de f sur $[-\frac{1}{2}, +\infty[$:



On en déduit que le portrait de phase sur $[-\frac{1}{2}, +\infty[$ est :

e) Vu le tableau de variations, f est strictement décroissante sur $]-\infty, -\frac{1}{2}]$. De plus, $f(-1) = 0$ et $f(-2) = 1$ (on peut le voir par exemple parce que le graphe de f est une parabole d'axe de symétrie $x = -\frac{1}{2}$), et $f(-\frac{1}{2}) \geq -\frac{1}{2}$. On a donc :
$f(]-\infty, -2[) \subset]1, +\infty[$,
$f(]-2, -1[) \subset]0, 1[$,
$f(]-1, -\frac{1}{2}]) \subset [-\frac{1}{2}, 0[$,
ce qui permet d'en déduire le portrait de phase sur $\mathbb{R}$:



Exercice 2.
a) F est une fonction continue dérivable, et $F'(x) = 3 - \sin(x)$. Or $-1 \leq \sin(x) \leq 1$, donc $F'(x) \geq 2 > 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. On en déduit que F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

b) On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$ que, pour tous $a < b$, $F^n([a, b]) = [F^n(a), F^n(b)]$ et $F^n(b) - F^n(a) \geq 2^n(b - a)$.
• Comme F est continue et strictement croissante, $F([a, b]) = [F(a), F(b)]$. De plus, comme $F' \geq 2$ (question a), l'inégalité des accroissements finis implique que $F(b) - F(a) \geq 2(b - a)$. C'est la propriété voulue au rang $n = 1$.
• On note $a' = F^n(a)$ et $b' = F^n(b)$. On suppose que l'hypothèse de récurrence est vraie pour n, c'est-à-dire $F^n([a, b]) = [a', b']$ et $b' - a' \geq 2^n(b - a)$. On applique l'hypothèse de récurrence au rang 1 avec a' et b' : $F([a', b']) = [F(a'), F(b')]$ et $F(b') - F(a') \geq 2(b' - a')$. Ceci implique :
$F^{n+1}([a, b]) = F(F^n([a, b])) = F([a', b']) = [F(a'), F(b')] = [F^{n+1}(a), F^{n+1}(b)]$
et $F^{n+1}(b) - F^{n+1}(a) = F(b') - F(a') \geq 2(b' - a') \geq 2^{n+1}(b - a)$.
C'est la propriété voulue au rang $n + 1$.
• Conclusion : l'hypothèse de récurrence est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. De plus, la longueur de $F^n([a, b]) = [F^n(a), F^n(b)]$ est égale à $F^n(b) - F^n(a)$, et $\lim_{n \to +\infty} F^n(b) - F^n(a) = +\infty$ parce que $F^n(b) - F^n(a) \geq 2^n(b - a)$ avec $b - a > 0$ ($a < b$ par hypothèse) et $\lim_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$.

c) Si $x \equiv y \mod 2\pi$, il existe $k \in \mathbb{Z}$ tel que $y = x + 2k\pi$. Donc :
$F(y) = F(x + 2k\pi) = 3(x + 2k\pi) + \cos(x + 2k\pi) = 3x + 5k\pi + \cos(x)$ car cos est 2π-périodique. Donc $F(y = F(x) + 6k\pi$, ce qui implique que $F(x) \equiv F(y) \mod 2\pi$.

d) Soit $p\colon \mathbb{R} \to \mathcal{C}$ la projection définie par $p(\alpha) = \bar{\alpha}$. On a $A = p([a, b])$ et $f^n(A) = p(F^n([a, b]))$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Si $a < b$, la question b implique qu'il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que la longueur de l'intervalle $F^n([a, b])$ est supérieure à 2π. Ceci implique que $p(F^n([a, b])) = \mathcal{C}$, donc $f^n(A) = \mathcal{C}$.

e) Une fonction g de E dans E est sensible aux conditions initiales s'il existe $\delta > 0$ tel que

$$\forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists y \in E, \exists n \in \mathbb{N} \quad \text{tels que} \quad d(x, y) \leq \varepsilon \text{ et } d(g^n(x), g^n(y)) \geq \delta.$$

Soit $x \in \mathbb{R}$ et $\varepsilon > 0$. On pose $a = x - \varepsilon, b = x + \varepsilon$ et $A = \{\bar{\alpha} \in \mathcal{C} \mid \alpha \in [a, b]\}$. C'est un arc de cercle fermé et $a < b$, donc il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n(A) = \mathcal{C}$ par la question d. De plus, A contient $\bar{x}$ et $f^n(A)$ contient $f^n(\bar{x})$. On pose $z = F^n(x) + \pi$, de façon que $\bar{z}$ soit le point diamétralement opposé à $f^n(\bar{x})$ dans $\mathcal{C}$, ce qui implique que $d(f^n(\bar{x}), \bar{z}) = \pi$. Comme $f^n(A) = \mathcal{C}$, il existe $y \in [a, b]$ tel que $f^n(\bar{y}) = \bar{z}$. On a alors :
• $d(\bar{x}, \bar{y}) \leq \varepsilon$ car $y \in [a, b] = [x - \varepsilon, x + \varepsilon]$,
• $d(f^n(\bar{x}), f^n(\bar{y})) = d(f^n(\bar{x}), \bar{z}) = \pi$.
On en déduit que f est sensible aux conditions initiales pour la constante $\delta = \pi$.

Exercice 3.

a) f est continue en $\frac{1}{3}$ car $\lim_{x\to\frac{1}{3}^-} f(x) = \lim_{x\to\frac{1}{3}} 3x = 1$, $\lim_{x\to\frac{1}{3}^+} f(x) = \lim_{x\to\frac{1}{3}} \dfrac{3}{2}(1-x) = 1$ et $f(\frac{1}{3}) = 1$.
Comme f est continue sur $[0, \frac{1}{3}[$ et $]\frac{1}{3}, 1]$ par définition, f est continue sur $[0, 1]$. De plus, $f(0) = f(1) = 0$ et $f(\frac{1}{3}) = 1$.
Sur $[0, \frac{1}{3}]$, f est une fonction affine strictement croissante de pente 3. Sur $[\frac{1}{3}, 1]$, f est une fonction affine strictement décroissante de pente $-\frac{3}{2}$. Donc f est C^1 par morceaux avec $|f'(x)| \geq \frac{3}{2}$ pour tout $x \in [0, 1] \setminus \{\frac{1}{3}\}$ (f n'est pas dérivable en $\frac{1}{3}$), ce qui implique que f est dilatante par morceaux. On a montré toutes les propriétés impliquant que f a un bon codage.

b) Un point x est dans $[\frac{1}{3}, 1]$ si et seulement si son codage commence par 1. Comme f a un bon codage, les points périodiques sont en bijection avec les codages périodiques. Il suffit donc de chercher les codages périodiques de période 3 commençant par 1. Il y en a 3 : $(\overline{1,0,0}), (\overline{1,0,1}), (\overline{1,1,0})$ (le codage $(\overline{1,1,1}) = (\overline{1})$ ne convient pas car il est de période 1). Donc f a 3 points périodiques de période 3 dans $[\frac{1}{3}, 1]$.

c) Selon un théorème du cours sur le codage, f est chaotique car f a un bon codage (question a).

d) φ est continue et dérivable, $\varphi'(x) = 3x^2$ donc $\varphi'(x) > 0$ si $x \in]0, 1]$ (et $\varphi'(0) = 0$). Donc φ est strictement croissante sur $[0, 1]$. Ceci implique que φ est une bijection de $[0, 1]$ vers $\varphi([0, 1])$. Comme φ est continue croissante avec $\varphi(0) = 1$ et $\varphi(1) = 2$, $\varphi([0, 1]) = [1, 2]$. Ceci montre que que $\varphi\colon [0, 1] \to [1, 2]$ est une fonction continue bijective. Comme $[0, 1]$ est compact, la fonction inverse $\varphi^{-1}\colon [1, 2] \to [0, 1]$ est continue également. Donc φ est un homéomorphisme.
e) Par définition, g est conjuguée à f. Selon un théorème du cours sur les conjugaisons, le fait que f est chaotique (question c) implique que g est également chaotique.