Corrigé de l'examen du 11 mai 2017

Exercice 1.

1. f est dérivable et $f'(x) = 2x$. D'où le tableau de variation :

	$-\infty$		0		$+\infty$
f'		$-$	0	$+$	
f		$\searrow$	$c/4$	$\nearrow$	

2. x est un point fixe de f si et seulement si $f(x) - x = 0$. On pose $g(x) = f(x) - x = x^2 - x + c/4$. On calcule les zéros de g. $\Delta = 1 - c$. Il y a 3 cas :

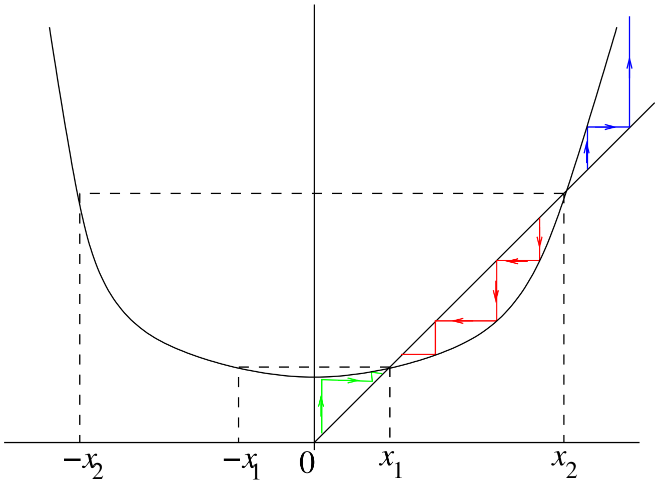
1. Si $0 \leq c < 1$, alors $\Delta > 0$ et g a deux zéros, qui sont $x_1 = \frac{1-\sqrt{1-c}}{2}$ et $x_2 = \frac{1+\sqrt{1-c}}{2}$, donc f a deux points fixes x_1 et x_2.
2. Si $c = 1$, alors $\Delta = 0$ et g a un unique zéro $x_0 = \frac{1}{2}$, donc f a un unique point fixe $\frac{1}{2}$.
3. Si $c > 1$, alors $\Delta < 0$ et g n'a pas de zéro, donc f n'a pas de point fixe.

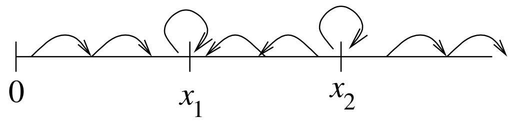
g est un polynôme du second degré avec un coefficient dominant strictement positif. On connaît alors le signe de g en fonction des racines. La position du graphe $y = f(x)$ par rapport à la droite $y = x$ est donnée par le signe de g. Il y a 3 cas :

1. Si $0 \leq c < 1$, alors g a 2 racines x_1 et x_2, $g(x) > 0$ pour $x \in]-\infty, x_1[\cup]x_2, +\infty[$ et $g(x) < 0$ pour $x \in]x_1, x_2[$ (g est du signe du coefficient dominant hors des racines, et du signe inverse entre). Donc $f(x) > x$ (le graphe de f est au dessus de $y = x$) pour tout $x \in]-\infty, x_1[\cup]x_2, +\infty[$ et $f(x) < x$ (le graphe de f est en dessous de $y = x$) pour tout $x \in]x_1, x_2[$.
2. Si $c = 1$, g a un unique zéro $\frac{1}{2}$ et $g(x) > 0$ pour tout $x \neq \frac{1}{2}$. Donc $f(x) > x$ pour tout $x \neq \frac{1}{2}$ (le graphe de f est au dessus de $y = x$ partout et touche la droite $y = x$ au point $\frac{1}{2}$).
3. Si $c > 1$, g n'a pas de zéro et $g(x) > x$ pour tout x, donc $f(x) > x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ (le graphe de f est strictement au dessus de $y = x$ partout).

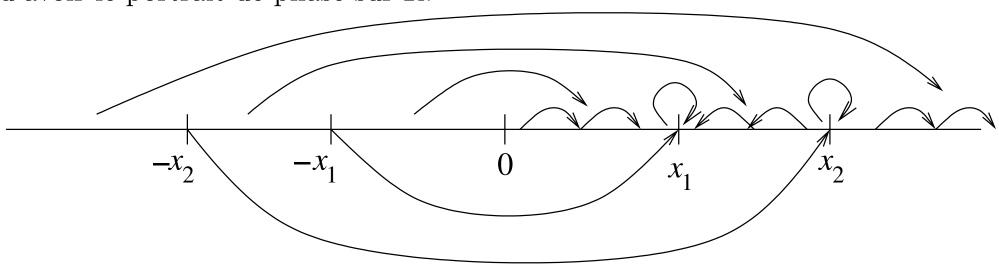
3. $c = 2 > 1$ donc on est dans le cas 3 ci dessus : f n'a pas de point fixe et $f(x) > x$ pour tout $x \in \mathbb{R}$. Soit $x \in \mathbb{R}$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note $x_n = f^n(x)$ (donc $x_0 = f^0(x) = x$). Pour tout n, on a $f(x_n) > x_n$. Or $f(x_n) = f^{n+1}(x) = x_{n+1}$. Donc $x_{n+1} > x_n$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. Autrement dit, la suite $(f^n(x))_{n\geq 0}$ est strictement croissante.
Si la suite croissante $(f^n(x))_{n\geq 0}$ est majorée, alors elle a une limite finie ℓ, et ℓ est un point fixe de f. Or f n'a pas de point fixe. Donc la suite $(f^n(x))_{n\geq 0}$ n'est pas majorée. Une suite croissante non majorée tend vers $+\infty$, c'est-à-dire $\lim\limits_{n\to+\infty} f^n(x) = +\infty$.

4. a) $x = 3/4$ est dans $[0, 1[$ donc on est dans le cas 1 ci-dessus : f a 2 points fixes $x_1 = \frac{1}{4}, x_2 = \frac{3}{4}$. A l'aide du tableau de variation et de la position de f par rapport à $y = x$, on peut dessiner le graphe de f et faire une analyse graphique (dessinée sur le graphe) ; on en déduit le portrait de phase sur $[0, +\infty[$ (ci-dessous à droite).

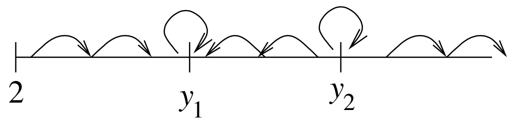




On remarque que $f > 0$ (car le minimum est $f(0) = c/4 > 0$), donc après une itération, tous les points sont dans $[0, +\infty[$. De plus, comme f est paire, si $x < 0$ alors $f(-x) = f(x)$. Ceci permet d'avoir le portrait de phase sur $\mathbb{R}$.



b) φ est continue strictement croissante (car $x \mapsto e^x$ l'est), $\varphi(0) = 2$ et $\lim_{x \to +\infty} \varphi(x) = +\infty$, donc φ est une bijection continue de $[0, +\infty[$ vers $[2, +\infty[$. De plus, $y = e^x + 1 \Leftrightarrow x = \ln(y - 1)$. Donc $\varphi^{-1}(y) = \ln(y-1)$, qui est également une fonction continue.
g est conjuguée à f par φ. Donc les points fixes de g sont $y_1 = \varphi(x_1) = \exp(\frac{1}{4}) + 1$ et $y_2 = \varphi(x_2) = \exp(\frac{3}{4}) + 1$, et le portrait de phase de g est :



Exercice 2.
1. On considère l'intervalle $I = [x - \varepsilon/2, x + \varepsilon/2] \cap [0, 1]$. C'est un intervalle fermé de longueur non nulle, donc par hypothèse il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n(I) = [0, 1]$. Donc il existe $y_0, y_1 \in I$ tels que $f^n(y_0) = 0$ et $f^n(y_1) = 1$. Par définition de I, on a $|x - y_0| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$ et de même $|x - y_1| \leq \varepsilon/2 < \varepsilon$.

2. On considère un système dynamique donné par une fonction $f\colon E \to E$. f est sensible aux conditions initiales s'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in E$, il existe un point y arbitrairement proche de x et un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $d(f^n(x), f^n(y)) \geq \delta$.
Avec des quantificateurs, la définition est :

$$\exists \delta > 0, \forall x \in E, \forall \varepsilon > 0, \exists y \in E, \exists n \in \mathbb{N} \text{ tels que } d(x, y) < \varepsilon \text{ et } d(f^n(x), f^n(y)) \geq \delta.$$

Soit $x \in [0, 1]$ et $\varepsilon > 0$. Par la question 1, il existe des points y_0, y_1 et un entier $n \in \mathbb{N}$ tels que $|x - y_0| < \varepsilon$, $|x - y_1| < \varepsilon$, $f^n(y_0) = 0$ et $f^n(y_1) = 1$.
Si $f^n(x) \leq \frac{1}{2}$, on pose $y = y_1$ et on a $|f^n(x) - f^n(y)| = |f^n(x) - 1| \geq \frac{1}{2}$. Si $f^n(x) > \frac{1}{2}$, on pose $y = y_0$ et on a $|f^n(x) - f^n(y)| = |f^n(x) - 0| \geq \frac{1}{2}$. Dans les deux cas, $|x - y| < \varepsilon$ et $|f^n(x) - f^n(y) \geq \frac{1}{2}$. Ceci montre que f est sensible aux conditions initiales avec $\delta = \frac{1}{2}$.

Exercice 3.
1. Par définition, f est continue sur $[0, \frac{1}{2}[$ et $]\frac{1}{2}, 1]$ (et continue à gauche en $\frac{1}{2}$).

$$\lim_{x \to \frac{1}{2}^-} f(x) = \frac{1}{4} + \frac{3}{4} = 1, \quad \lim_{x \to \frac{1}{2}^+} f(x) = -\frac{1}{4} - \frac{1}{4} + \frac{3}{2} = 1 \quad \text{et} \quad f(\frac{1}{2}) = 1$$

donc f est continue en $\frac{1}{2}$, de sorte que f est continue sur $[0, 1]$.

2. f est dérivable sur $[0, 1] \setminus \{\frac{1}{2}\}$.
Si $x \in [0, \frac{1}{2}[$, $f'(x) = 2x + \frac{3}{2} \geq \frac{3}{2}$.
Si $x \in]\frac{1}{2}, 1]$, $f'(x) = -2x - \frac{1}{2}$ donc $|f'(x)| = 2x + 1 \geq 2 \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = \frac{3}{2}$ (car $x \geq \frac{1}{2}$).
Conclusion : pour tout $x \neq \frac{1}{2}$, $|f'(x)| \geq \lambda$ avec $\lambda = \frac{3}{2}$.

3. $f(0) = 0$, $f(1) = 0$, le point $c = \frac{1}{2}$ vérifie $f(c) = 1$, f est strictement croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$ (car $f' > 0$ sur cet intervalle), f est strictement décroissante sur $[\frac{1}{2}, 1]$ (car $f' < 0$ sur cet intervalle) et f est dilatante par morceaux (question 2). Donc f a un bon codage. Par un théorème du cours, le fait que f a un bon codage implique que f est chaotique.

4. $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ si et seulement si son codage commence par 1, et $f(x) \in [0, \frac{1}{2}]$ si et seulement si le 2ème chiffre de son codage est 0. De plus, x est un point périodique de période 4 si et seulement si son codage est périodique de période (exactement) 4. Il y a 3 possibilités : $(\overline{1, 0, 0, 0}), (\overline{1, 0, 0, 1}), (\overline{1, 0, 1, 1})$.
(remarque : $(\overline{1, 0, 1, 0}) = (\overline{1, 0})$ ne convient pas car c'est de période 2).

Exercice 4.
1. $f(\bar{\alpha}_0) = \frac{4\pi}{3} \bmod 2\pi$ et $f^2(\alpha_0) = \frac{8\pi}{3} \bmod 2\pi = \frac{2\pi}{3} \bmod 2\pi = \bar{\alpha}_0$. Donc $\bar{\alpha}_0$ est périodique de période 2 (la période n'est pas 1 car $f(\bar{\alpha}_0) \neq \bar{\alpha}_0$).

2. $f^3(\bar{\alpha}) = 2^3\alpha \bmod 2\pi$. Donc $f^3(\bar{\alpha}) = \bar{\alpha} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, 8\alpha = \alpha + 2k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \alpha = \frac{2k\pi}{7}$.
Ces points représentent 7 points de $\mathcal{C}$, pour $k = 0, 1, \ldots, 6$ (comme on est modulo 2π, les autres entiers k redonnent les mêmes points de $\mathcal{C}$). Ce sont les points périodiques $\bar{\alpha}$ dont la période divise 3, c'est-à-dire dont la période est 1 ou 3. Il faut donc enlever les points de période 1 (autrement dit, les points fixes).
$f(\bar{\alpha}) = \bar{\alpha} \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \alpha = 2\alpha + 2k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \alpha = 2k\pi$.
Il y a donc un seul point fixe, qui est $\bar{0}$. Conclusion : il y a 6 points périodiques de période 3 dans $\mathcal{C}$.

3. On note $E = \{\bar{\alpha} \in \mathcal{C} \mid \exists n \in \mathbb{N}, f^n(\bar{\alpha}) = \bar{\alpha}_0\}$.
$f^n(\bar{\alpha}) = \bar{\alpha}_0 \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, 2^n\alpha = \frac{2\pi}{3} + 2k\pi \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{Z}, \alpha = \frac{2\pi}{3.2^n} + \frac{2k\pi}{2^n}$. Pour n fixé, cela donne 2^n points de $\mathcal{C}$, pour $0 \leq k \leq 2^n - 1$ (les autres entiers k redonnent les mêmes points de $\mathcal{C}$ car on est modulo 2π).
On note $\alpha_{n,k} = \frac{2\pi}{3.2^n} + \frac{2k\pi}{n}$. On a l'égalité $E = \{\bar{\alpha}_{n,k} \mid n \in \mathbb{N}, 0 \leq k \leq 2^n - 1\}$.
La suite de la preuve est similaire à celle faite en cours (densité des points périodiques) ou celle de l'exercice 1 de la feuille d'exercices n°2. On peut s'aider d'un dessin. Remarquer que, pour n fixé, $\frac{2\pi}{3.2^n}$ est un angle constant et que les points $\bar{\alpha}_{n,k}$ sont obtenus par une rotation d'angle $\frac{2k\pi}{n}$ par rapport à $\frac{2\pi}{3.2^n}$.

Soit $\bar{\alpha} \in \mathcal{C}$ et $\varepsilon > 0$. On fixe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $\frac{2\pi}{2^n} < \varepsilon$. Les points $(\bar{\alpha}_{n,k})_{0 \leq k \leq 2^n - 1}$ découpent le cercle en 2^n arcs de cercle de même longueur, égale à $\ell = \frac{2\pi}{2^n}$. Le point $\bar{\alpha}$ est nécessairement dans un de ces arcs de cercle, et la distance entre $\bar{\alpha}$ et chacune des extrémités de cet arc de cercle est inférieure ou égale à ℓ (on utilise ici le fait que $\ell \leq \pi$ parce que $n \geq 1$, de sorte que les distances entre points sont égales aux longueurs des arcs de cercle considérés). Ceci montre que pour tout $\bar{\alpha} \in \mathcal{C}$ et tout $\varepsilon > 0$, il existe $n \in \mathbb{N}^*$ et $k \in \{0, \ldots, 2^{n-1}\}$ tels que $d(\bar{\alpha}, \bar{\alpha}_{n,k}) < \varepsilon$.
Conclusion : l'ensemble E est dense dans $\mathcal{C}$.