# Corrigé de l'interrogation du 21 avril 2017

**Exercice 1.**

a) $x_0 = \frac{3}{16} \in [0, 1/2[$ donc $s_0(x_0) = 0$ et $T(x_0) = 2x_0 = \frac{3}{8}$.
$\frac{3}{8} \in [0, 1/2[$, donc $s_1(x_0) = 0$ et $T^2(x_0) = 2T(x_0) = \frac{3}{4}$.
$\frac{3}{4} \in [1/2, 1[$, donc $s_2(x_0) = 1$ et $T^3(x_0) = 2T^2(x_0) - 1 = \frac{1}{2}$.
$\frac{1}{2} \in [1/2, 1[$, donc $s_3(x_0) = 1$ et $T^4(x_0) = 2T^3(x_0) - 1 = 0$.
Comme 0 est un point fixe, $T^n(x_0) = 0$ pour tout $n \geq 4$, donc $s_n(x_0) = 0$ pour tout $n \geq 4$. On a donc $S(x_0) = (0, 0, 1, 1, \overline{0})$.

b) Si $x \in [0, 1/4[$, alors $s_0(x) = 0$ et $T(x) = 2x$. De plus, $2x < 1/2$, donc $s_1(x) = 0$. Ceci montre que, si $x \in [0, 1/4[$, alors son codage commence par 00.
Réciproquement, si le codage de $x$ commence par 00, alors $x \in [0, 1/2[$ car $s_0(x) = 0$, donc $T(x) = 2x$. De plus, comme $s_1(x) = 0$, on a $T(x) \in [0, 1/2[$, donc $2x \in [0, 1/2[$, ce qui donne $x \in [0, 1/4[$. Ceci montre que, si le codage de $x$ commence par 00, alors $x \in [0, 1/4[$. D'où l'équivalence demandée.

Autre preuve, utilisant le fait que le codage correspond au développement en base 2, c'est-à-dire

$$x = \sum_{n=0}^{+\infty} s_n(x) 2^{-(n+1)}.$$

Si $s_0(x) = 1$ alors $x \geq s_0(x)2^{-1} = 1/2$. Si $s_1(x) = 1$ alors $x \geq s_1(x)2^{-2} = 1/4$. Donc, si le codage de $x$ ne commence pas par 00, alors $x \geq 1/4$. Autrement dit, si $x < 1/4$, alors son codage commence par 00.
Réciproquement, si le codage de $x$ commence par 00, alors

$$x \leq 0 \cdot 2^{-1} + 0 \cdot 2^{-2} + \sum_{n=2}^{+\infty} 2^{-(n+1)} = 2^{-3} \sum_{k=0}^{+\infty} 2^{-k} = 2^{-3} \times 2 = 1/4.$$

De plus, l'égalité dans ce qui précède n'est possible que si $\forall n \geq 2$, $s_n(x) = 1$, ce qui est exclu car un développement en base 2 ne peut pas se terminer par une infinité de 1. Donc $x < 1/4$. D'où l'équivalence demandée.

c) $T^3(x) = x$ si et seulement si son codage vérifie $\sigma^3(S(x)) = S(x)$, autrement dit $s_{n+3}(x) = s_n(x)$ pour tout $n \geq 0$. De plus, $x \in [0, 1/4[ \Leftrightarrow s_0(x) = s_1(x) = 0$ par la question b). Donc $T^3(x) = x$ est équivalent au fait que $S(x)$ est de la forme $(\overline{0, 0, a_2})$ avec $a_2 \in \{0, 1\}$. Il y a 2 possibilités :

$$(\overline{0, 0, 0}),\ (\overline{0, 0, 1})$$

(aucune ne se termine par un nombre infini de 1, donc ces deux codages sont effectivement réalisés).
Pour que $x$ soit de période 3, il est équivalent que son codage soit de période 3. Parmi les 2 codages ci-dessus, $(\overline{0, 0, 0}) = (\overline{0})$ n'est pas de période 3 (il est de période 1), $(\overline{0, 0, 1})$ est bien de période 3. Il y a donc 1 point périodique de période 3 dans $[0, 1/4[$.
d) Si $x$ est périodique de période 2, alors son codage est de la forme $(\overline{a_0, a_1})$. Si de plus $x \in [0, 1/4[$, alors son codage commence par 00 par la question b), donc son codage est $(\overline{0, 0})$. Mais $(\overline{0, 0}) = (\overline{0})$ est périodique de période 1, c'est donc le codage d'un point fixe et non d'un point de période 2. Conclusion : il n'existe pas de point périodique de période 2 dans $[0, 1/4[$.

Autre preuve, sans utiliser le codage : si $x \in [0, 1/4[$ est un point périodique de période 2, il vérifie $T^2(x) = x$. De plus, $T(x) = 2x \in [0, 1/2[$ et $T^2(x) = 2T(x) = 4x$. L'égalité $T^2(x) = x$ devient donc $4x = x$, qui a pour unique solution $x = 0$. Or 0 est un point fixe. Conclusion : il n'existe pas de point périodique de période 2 dans $[0, 1/4[$.

**Exercice 2.** a) Les points fixes dans $\Sigma$ sont de la forme $(\overline{a_0})$, il y en a deux : $(\overline{0})$ et $(\overline{1})$. La suite $(\overline{0})$ est dans $\Sigma'$ (on n'a jamais $a_n = 1$, donc la condition est vide). Par contre, la suite $(\overline{1}) = (1, 1, 1, ...)$ n'est pas dans $\Sigma'$ (on a $a_0 = 1$ et $a_2 = 1$, ce qui contredit la condition). Conclusion : il y a un seul point fixe dans $\Sigma'$, c'est $(\overline{0})$.
b) Les points $A = (a_n)_{n\geq 0} \in \Sigma$ vérifiant $\sigma^2(A) = A$ sont de la forme $(\overline{a_0, a_1})$, il y en a 4 : $(\overline{0, 0}) = (\overline{0})$, $(\overline{1, 1}) = (\overline{1})$, $(\overline{0, 1})$, $(\overline{1, 0})$. Les deux premiers sont des points fixes, donc pas de période 2. $(\overline{0, 1}) = (0, 1, 0, 1, ...)$ n'est pas dans $\Sigma'$, de même $(\overline{1, 0}) \notin \Sigma'$. Conclusion : il n'y a aucun point périodique de période 2 dans $\Sigma'$.