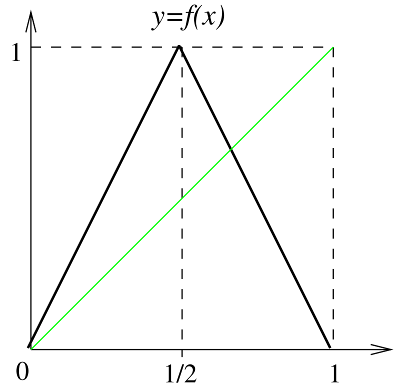
# Corrigé du devoir maison

**1.** $f$ est une fonction affine sur $[0,1/2[$ et sur $]1/2,1]$, donc elle est clairement continue sur ces deux intervalles.
Sur $[0,1/2]$, $f(x)=2x$ et $\lim_{x\to 1/2^-} f(x)=1=f(1/2)$.
Sur $]1/2,1]$, $f(x)=1-2x$ et $\lim_{x\to 1/2^+} f(x)=1$.
Donc $f$ est continue en $1/2$. Conclusion : $f$ est continue sur $[0,1]$.
Le graphe de $f$ est dessiné ci-contre.
Remarquons que $f$ prend bien ses valeurs dans $[0,1]$. Le maximum 1 est atteint en $1/2$, le minimum 0 est atteint en 0 et 1.
Cherchons les points fixes de $f$.
– Sur $[0,1/2]$, $f(x)=x \Leftrightarrow x=2x$ et $x\in[0,1/2] \Leftrightarrow x=0$,
– sur $]1/2,1]$, $f(x)=x \Leftrightarrow x=2-2x$ et $x\in]1/2,1] \Leftrightarrow x=2/3$.
Donc $f$ a deux points fixes, qui sont 0 et $2/3$.




**2.** Soit $a,b$ deux points de $[0,1/2]$ avec $a\le b$. Comme $f$ est continue et strictement croissante sur $[0,1/2]$, on a $f([a,b])=[f(a),f(b)]$. Or $f(a)=2a$ et $f(b)=2b$, donc la longueur de $f([a,b])$ est $2b-2a=2(b-a)$.
Soit maintenant $a,b$ deux points de $[1/2,1]$ avec $a\le b$. Comme $f$ est continue et strictement décroissante sur $[1/2,1]$, on a $f([a,b])=[f(b),f(a)]$, qui est l'intervalle $\langle f(a),f(b)\rangle$. Or $f(a)=1-2a$ et $f(b)=1-2b$, donc la longueur de $f([a,b])$ est $(1-2a)-(1-2b)=2(b-a)$.

**3.** L'image d'un intervalle compact par une fonction continue est un intervalle compact, donc $f(I)$ est un intervalle compact. On distingue 3 cas :
**cas 1 :** $a$ et $b$ sont tous les deux dans $[0,1/2]$,
**cas 2 :** $a$ et $b$ sont tous les deux dans $[1/2,1]$,
**cas 3 :** $a<1/2<b$.
Dans les cas 1 et 2, la question 2 implique que la longueur de $f(I)$ est égale à $2(b-a)$, et $2(b-a)>0$ car $a<b$. Dans le cas 3, $I$ contient $[a,\frac{1}{2}]$, donc $f(I)$ contient $f([a,\frac{1}{2}])$ et la question 2 implique que $f([a,\frac{1}{2}])$ est un intervalle de longueur $2(\frac{1}{2}-a)$, et $2(\frac{1}{2}-a)>0$ car $a<\frac{1}{2}$. On en déduit que dans tous les cas, l'intervalle $f(I)$ est de longueur non nulle.

Montrons par récurrence sur $n$ que $f^n(I)$ est un intervalle compact de longueur non nulle pour tout $n\in\mathbb{N}$.
– c'est vrai pour $n=0$, et on vient de le montrer pour $n=1$.
– si c'est vrai pour $n\in\mathbb{N}$, on applique ce qui précède à $I'=f^n(I)$ (qui est un intervalle compact de longueur non nulle par hypothèse de récurrence) et on en déduit que $f(I')=f^{n+1}(I)$ est un intervalle compact de longueur non nulle. C'est la propriété au rang $n+1$.
– Conclusion : $f^n(I)$ est un intervalle compact de longueur non nulle pour tout entier $n\ge 0$.

**4. a)** Par la question 3, $f^n(I)$ est un intervalle compact de longueur non nulle pour tout $n\in\mathbb{N}$. On écrit $I=[a,b]$ avec $a,b\in[0,1]$ et $a<b$ . On note $a_n=f^n(a)$ et $b_n=f^n(b)$ pour tout $n\ge 0$. L'intervalle $f^n(I)$ contient les points $a_n$ et $b_n$, donc $f^n(I)$ contient l'intervalle $\langle a_n,b_n\rangle$ car $f^n$ est continue (remarquons qu'on a évité la notation $[a_n,b_n]$ car on ne sait pas si $a_n\le b_n$).
On distingue 3 cas comme dans la question 3 :
**cas 1 :** $a_n$ et $b_n$ sont tous les deux dans $[0,1/2]$,
**cas 2 :** $a_n$ et $b_n$ sont tous les deux dans $[1/2,1]$,
**cas 3 :** $a_n$ et $b_n$ sont de part et d'autre de $1/2$ (c'est-à-dire $1/2\in\langle a_n,b_n\rangle$).

On va montrer qu'il existe un entier $n \geq 0$ tel que $a_n, b_n$ sont dans le cas 3, en faisant une preuve par l'absurde.
Supposons que pour tout entier $n \geq 0$, les points $a_n, b_n$ sont soit dans le cas 1, soit dans le cas 2. On peut alors appliquer la question 2. Si $a_n \leq b_n$, on considère l'intervalle $[a_n, b_n]$ ; si $a_n > b_n$, on considère l'intervalle $[b_n, a_n]$. Dans les deux cas, on trouve que $f(\langle a_n, b_n \rangle)$ est l'intervalle $\langle a_{n+1}, b_{n+1} \rangle$, et sa longueur est $|b_{n+1} - a_{n+1}| = 2|b_n - a_n|$. Donc $(|b_n - a_n|)_{n \geq 0}$ est une suite géométrique de raison 2, ce qui implique que $|b_n - a_n| = 2^n(b-a)$ pour tout $n \in \mathbb{N}$. On en déduit que $f^n(I)$ est un intervalle de longueur $2^n|b-a|$. Or $\lim_{n \to +\infty} 2^n(b-a) = +\infty$ car $b - a > 0$ et $\lim_{n \to +\infty} 2^n = +\infty$, ce qui donne une contradiction car l'intervalle $f^n(I)$ est inclus dans $[0,1]$ pour tout $n \geq 0$, donc sa longueur est au plus 1. On en déduit qu'il existe $n \geq 0$ pour lequel $a_n, b_n$ sont dans le cas 3. Comme $f^n(I)$ contient $\langle a_n, b_n \rangle$, on en déduit que $f^n(I)$ contient $1/2$.
**b)** $f(1/2) = 1$ et $f(1) = 0$, donc $f^{n+2}(I)$ contient $f^2(1/2) = 0$. On prend $m = n + 2 \geq 2$.
**c)** Soit $c$ le maximum de $f^m(I)$, de sorte que $f^m(I)$ s'écrit $f^m(I) = [0, c]$. On a $c > 0$ car $f^m(I)$ est de longueur non nulle (question 3). On applique a) à l'intervalle $[0, c]$. On trouve qu'il existe $k \geq 0$ tel que $f^k([0, c])$ contient $1/2$. Donc $f^{k+1}([0, c])$ contient $f(1/2) = 1$. De plus, $f^{k+1}([0, c])$ contient $f^{k+1}(0) = 0$ (car 0 est un point fixe). Comme $f^{k+1}$ est continue et que $f^{k+1}([0, c])$ est un intervalle inclus dans $[0, 1]$, on en déduit que $f^{k+1}([0, c]) = [0, 1]$. On prend alors $p = m + k + 1$. Ainsi, $f^p(I) = f^{k+1}(f^m(I)) = [0, 1]$. On a bien $p \geq 1$.

**5.** Soit $x \in [0, 1]$ et $\varepsilon > 0$. On considère l'intervalle $I = [x - \varepsilon, x + \varepsilon] \cap [0, 1]$ (l'intersection avec $[0, 1]$ sert à être sûr qu'on reste dans $[0, 1]$) ; on remarque que $I$ est un intervalle compact de longueur non nulle. Par la question 4.c), il existe un entier $p \geq 1$ tel que $f^p(I) = [0, 1]$. Donc il existe $x_0, x_1$ dans $I$ tels que $f^p(x_0) = 0$ et $f^p(x_1) = 1$. Par l'inégalité triangulaire, on a

$$\underbrace{|f^p(x_1) - f^p(x_0)|}_{=1} \leq |f^p(x_1) - f^p(x)| + |f^p(x) - f^p(x_0)|.$$

Si $|f^p(x) - f^p(x_0)| < 1/2$ et $|f^p(x) - f^p(x_1)| < 1/2$, on arrive à la contradiction $1 < 1$. Donc :
– soit on a $|f^p(x) - f^p(x_0)| \geq 1/2$ ; on pose alors $y = x_0$,
– soit on n'est pas dans le cas précédent, donc on a $|f^p(x) - f^p(x_1)| \geq 1/2$ ; on pose alors $y = x_1$.
Dans les deux cas, $|f^p(x) - f^p(y)| \geq 1/2$ et $|x - y| \leq \varepsilon$ car $y \in I$ On a donc montré que $f$ est sensible aux conditions initiales pour la constante $\delta = 1/2$ :

$$\forall x \in [0, 1], \forall \varepsilon > 0, \exists y \in [0, 1], \exists p \geq 0, |x - y| \leq \varepsilon \text{ et } |f^p(x) - f^p(y)| \geq \delta.$$

**6.** Par hypothèse, $\varphi([a, b])$ contient les points $a$ et $b$, autrement dit il existe $x_0, x_1$ dans $[a, b]$ tels que $\varphi(x_0) = a$ et $\varphi(x_1) = b$. Soit $g(x) = \varphi(x) - x$ pour tout $x \in [a, b]$. La fonction $g$ est continue sur l'intervalle $[a, b]$ (car $\varphi$ est continue). De plus, $g(x_0) = a - x_0 \leq 0$ parce que $x_0 \geq a$ (car $x_0 \in [a, b]$) et $g(x_1) = b - x_1 \geq 0$ parce que $x_1 \leq b$. Par le théorème des valeurs intermédiaires, il existe un point $x$ compris entre $x_0$ et $x_1$ tel que $g(x) = 0$. Comme $x_0, x_1$ appartiennent à l'intervalle $[a, b]$, on a aussi $x \in [a, b]$. Et par définition de $g$, on a $\varphi(x) = x$.

**7. a)** Soit $a, b$ deux points de $[0, 1]$ avec $a < b$. Par la question 4.c), il existe un entier $p \geq 1$ tel que $f^p([a, b]) = [0, 1]$. En particulier, $f^p([a, b])$ contient $[a, b]$. En appliquant la question 6 à $\varphi = f^p$, on trouve qu'il existe un point $x \in [a, b]$ tel que $f^p(x) = x$. Autrement dit, $x$ est un point périodique pour $f$.
**b)** Soit $\varepsilon > 0$ et $x_0 \in [0, 1]$. On considère l'intervalle $I = [x_0 - \varepsilon, x_0 + \varepsilon] \cap [0, 1]$ ; c'est un intervalle compact de longueur non nulle. On applique 7.a) : il existe un point périodique $x \in I$. On a bien $|x_0 - x| \leq \varepsilon$. On a montré :

$$\forall \varepsilon > 0, \forall x_0 \in [0, 1], \exists x \in [0, 1], |x_0 - x| \leq \varepsilon \text{ et } x \text{ est un point périodique.}$$

Conclusion : l'ensemble des points périodiques de $f$ est dense dans $[0, 1]$.