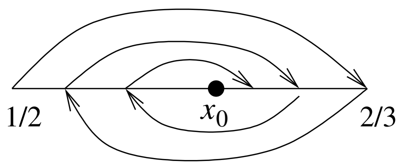
Corrigé du devoir maison

Problème I.

1. $\frac{\lambda}{4} = \frac{2}{3} > \frac{1}{2}$. D'après le tableau de variation, f est décroissante (continue) sur $I = [\frac{1}{2}, \frac{\lambda}{4}]$, donc $f(I) = [f(\frac{\lambda}{4}), f(\frac{1}{2})]$. Or $f(\frac{1}{2}) = \frac{\lambda}{4}$ et $f(\frac{\lambda}{4}) = f(\frac{2}{3}) = \frac{16}{27} \in]\frac{1}{2}, \frac{2}{3}[$. Donc $f(I) \subset I$. De plus, $x_0 = \frac{5}{8}$ appartient bien à $[\frac{1}{2}, \frac{2}{3}]$.
(on peut calculer les différences entre fractions pour montrer les inégalités, par exemple $\frac{5}{8} - \frac{1}{2} = \frac{1}{8} > 0$ et $\frac{2}{3} - \frac{5}{8} = \frac{1}{24} > 0$ donc $\frac{1}{2} < x_0 < \frac{2}{3}$; ou simplement calculer les valeurs approchées pour les comparer, par exemple $\frac{2}{3} \simeq 0,667$, donc $x_0 = 0,625 \in]0,5; \frac{2}{3}[$)

2. $f'(x) = \lambda(1 - 2x)$. C'est une fonction continue décroissante donc $f'(I) = [f'(\frac{2}{3}), f'(\frac{1}{2})]$. Or $f'(\frac{1}{2}) = 0$ et $f'(\frac{2}{3}) = -\frac{8}{9}$. Donc pour tout $x \in I$, $-\frac{8}{9} \leq f'(x) \leq 0$, ce qui est le résultat voulu en prenant $A = \frac{8}{9} \in]0, 1[$.
La question 1 implique que, pour tout $x \in I$ et tout entier $n \geq 1$, $f^n(x) \in I$. On montre par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ que, pour tout $x \in I$, $|f^n(x) - x_0| \leq A^n|x - x_0|$ *(on peut aussi utiliser directement la proposition du cours sans la redémontrer)*.
• C'est vrai pour $n = 0$ car $f^0(x) = x$ et $A^0 = 1$.
• On suppose que la propriété est vraie pour n. Soit $x' = f^n(x)$. Comme $x' \in I$, l'inégalité des accroissements finis implique que $|f(x') - f(x_0)| \leq A|x' - x_0|$. Par hypothèse de récurrence, $|x' - x_0| = |f^n(x) - x_0| \leq A^n|x - x_0|$. Donc $|f(x') - f(x_0)| = |f^{n+1}(x) - x_0| \leq A^{n+1}|x - x_0|$.
• Conclusion : la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

Cette propriété implique que, pour tout $x \in I$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f^n(x) = x_0$ car $0 < A < 1$ donc $\lim_{n\to+\infty} A^n = 0$. Comme f est décroissante sur I avec x_0 un point fixe, $f([\frac{1}{2}, x_0]) \subset [x_0, \frac{\lambda}{4}]$ et $f([x_0, \frac{\lambda}{4}]) \subset [\frac{1}{2}, x_0]$. Donc chaque trajectoire converge vers le point fixe x_0 en alternant côté gauche et côté droit de x_0, et le portrait de phase de f sur I est le suivant :



3. a) Comme f est continue et strictement croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$ avec $f(0) = 0$ et $f(\frac{1}{2}) > \frac{1}{2}$, il existe un unique point $y_0 \in]0, \frac{1}{2}[$ tel que $f(y_0) = \frac{1}{2}$. De même, le tableau de variation de f montre qu'il existe un unique point $y_1 \in]\frac{1}{2}, 1[$ tel que $f(y_1) = \frac{1}{2}$.

$f(x) = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \lambda x(1 - x) - \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow x^2 - x + \frac{1}{2\lambda} = 0$.
C'est un trinôme du second degré avec $\Delta = 1 - \frac{4}{2\lambda} = \frac{1}{4}$. Les racines sont $y_0 = \frac{1-\sqrt{\Delta}}{2} = \frac{1}{4}$ et $y_1 = \frac{1+\sqrt{\Delta}}{2} = \frac{3}{4}$ (on a bien $y_0 \in]0, \frac{1}{2}[$ et $y_1 \in]\frac{1}{2}, 1[$). De plus, $y_1 > \frac{\lambda}{4}$ car $\frac{3}{4} > \frac{2}{3}$.

b) Vu le tableau de variation de la fonction, $f([y_0, \frac{1}{2}]) = [\frac{1}{2}, \frac{\lambda}{4}]$ et $f([\frac{1}{2}, y_1]) = [\frac{1}{2}, \frac{\lambda}{4}]$. Donc $f([y_0, y_1]) = I$. En utilisant la question 2, on obtient que, $\forall x \in [y_0, y_1]$, $\lim\limits_{n\to+\infty} f^n(x) = x_0$.

4. a) Soit $x \in]0, y_0]$ tel que $f^i(x) \in [0, \frac{1}{2}]$ pour tout entier i tel que $0 \leq i \leq n$. Comme rappelé dans l'énoncé, $f(t) > t$ pour tout $t \in]0, x_0[$, avec $x_0 > \frac{1}{2}$. En particulier, $f(f^i(x)) \geq f^i(x)$ pour tout $0 \leq i \leq n - 1$. A priori les inégalités sont larges car les points sont dans $[0, \frac{1}{2}]$, avec 0 non exclu. Mais comme ceci implique que $f^i(x) \geq x > 0$, on a en fait des inégalités strictes, autrement dit : $0 < x < f(x) < f^2(x) < \cdots < f^n(x)$.

b) Soit $x \in]0, y_0]$. On fait une preuve par l'absurde. Supposons que pour tout entier $i \geq 0$, $f^i(x) \in [0, \frac{1}{2}]$. Par la question 4.a, la suite $(f^i(x))_{i\geq 0}$ est strictement croissante. Comme elle est majorée par $\frac{1}{2}$, elle est convergente ; de plus sa limite est un point fixe appartenant à $]0, \frac{1}{2}]$. Or il n'y a pas de point fixe dans $]0, \frac{1}{2}]$. On en déduit qu'il existe i_0 tel que $f^{i_0}(x) > \frac{1}{2}$. On définit $N = \max\{i \in \mathbb{N} \mid f^i(x) \leq \frac{1}{2}\}$; N est bien défini car l'ensemble est non vide (il contient $i = 0$) et il est majoré par i_0. Par définition de N, $f^i(x) \in [0, \frac{1}{2}]$ pour tout entier $0 \leq i \leq N$ et $f^{N+1}(x) > \frac{1}{2}$. De plus, $f^{N+1}(x) = f(f^N(x))$ donc $f^{N+1}(x)$ est inférieur ou égal à $\frac{\lambda}{4}$, qui est la valeur maximale atteinte par f. Donc $f^{N+1}(x) \in I = [\frac{1}{2}, \frac{\lambda}{4}]$.

5. Soit $x \in]0, 1[$.
• Si $x \in]0, y_0]$, la question 4.b montre qu'il existe un entier N tel que $f^{N+1}(x) \in I$; on prend $M = N + 1$.
• Si $x \in [y_0, y_1]$, la question 3.b montre que $f(x) \in I$; on prend $M = 1$.
• Si $x \in [y_1, 1[$, alors $f(x) \in]0, \frac{1}{2}]$ vu le tableau de variation de f et la définition de y_1. Si $f(x) \leq y_0$, la question 4.b implique qu'il existe N tel que $f^{N+1}(f(x)) \in I$; on prend $M = N+2$. Sinon, $f(x) \in [y_0, \frac{1}{2}]$ et $f^2(x) \in I$; on prend $M = 2$.
Dans tous les cas, il existe un entier $M \geq 0$ tel que $f^M(x) \in I$. La question 2 permet de conclure que $\lim\limits_{n\to+\infty} f^n(x) = x_0$ pour tout $x \in]0, 1[$.

Si $x = 0$ alors $f^n(x) = 0$ pour tout entier $n \geq 0$. Si $x = 1$, alors $f(x) = 0$ et $f^n(x) = 0$ pour tout entier $n \geq 1$. Ce sont les seuls points dont la trajectoire ne tend pas vers x_0.

Remarque : le résultat du problème I reste vrai pour tout $\lambda \in]2, 3[$. Néanmoins, la méthode utilisée à la question 2 ne marche pas si λ est proche de 3 (on peut vérifier que $f'_\lambda(\frac{\lambda}{4}) \leq -1$ si $\lambda \geq 1 + \sqrt{3}$). Il faut utiliser une méthode un peu différente : on note $I_1 = [\frac{1}{2}, x_0]$ et $I_2 = [x_0, \frac{\lambda}{4}]$; on montre que $f_\lambda(I_1) \subset I_2$ et $f_\lambda(I_2) \subset I_1$; puis on borne f'_λ sur I_1 et sur I_2, ce qui permet de montrer qu'il existe $A \in]0, 1[$ tel que $0 \leq (f_\lambda^2)'(x) \leq A$ pour tout $x \in I_1 \cup I_2$. La suite est identique.

Problème II.

1. Comme f est continue et strictement croissante sur $[0, \frac{1}{2}]$ avec $f(0) = 0$ et $f(\frac{1}{2}) = \frac{\lambda}{4} > \frac{1}{2}$, il existe un unique point $y_0 \in]0, \frac{1}{2}[$ tel que $f(y_0) = \frac{1}{2}$. De même, le tableau de variation de f montre qu'il existe un unique point $y_1 \in]\frac{1}{2}, 1[$ tel que $f(y_1) = \frac{1}{2}$.

2. On note f_+ la restriction de f à $[0, \frac{1}{2}]$ et f_- la restriction de f à $[\frac{1}{2}, 1]$; f_+ est strictement croissante et f_- est strictement décroissante *(cette notation sert seulement à mieux distinguer les parties croissante et décroissante de f).*
Par croissance, $f([0, y_0]) = [f(0), f(y_0)] = [0, \frac{1}{2}]$. Si $x \in [0, y_0]$, $f \circ f(x) = f \circ f_+(x)$ car $x \in [0, \frac{1}{2}]$, et

$$f \circ f(x) = f(\underbrace{f_+(x)}_{\in[0,\frac{1}{2}]}) = f_+ \circ f_+(x).$$

La fonction $f_+ \circ f_+$ est strictement croissante (comme composition de deux fonctions croissantes), donc f^2 est strictement croissante sur $[0, y_0]$.
$f([y_0, \frac{1}{2}]) = [f(y_0), f(\frac{1}{2})] = [\frac{1}{2}, \frac{\lambda}{4}] \subset [\frac{1}{2}, 1]$. Donc si $x \in [y_0, \frac{1}{2}]$, $f \circ f(x) = f \circ f_+(x)$ et

$$f \circ f(x) = f(\underbrace{f_+(x)}_{\in[\frac{1}{2},1]}) = f_- \circ f_+(x).$$

La fonction $f_- \circ f_+$ est strictement décroissante (comme composition d'une fonction décroissante et d'une fonction croissante), donc f^2 est strictement décroissante sur $[y_0, \frac{1}{2}]$.
On a des arguments similaires sur les autres intervalles :

- $f([\frac{1}{2}, y_1]) \subset [\frac{1}{2}, 1]$; donc si $x \in [\frac{1}{2}, y_1]$, $f \circ f(x) = f_- \circ f_-(x)$, et par conséquent f^2 est strictement décroissante sur $[\frac{1}{2}, y_1]$ (comme composition de deux fonctions décroissantes).
- $f([y_1, 1]) = [0, \frac{1}{2}]$; donc si $x \in [y_1, 1]$, $f \circ f(x) = f_+ \circ f_-(x)$, et par conséquent f^2 est strictement croissante sur $[y_1, 1]$ (comme composition d'une fonction croissante et d'une fonction décroissante).

D'où le tableau de variation de f^2 :

	0		y_0		$\frac{1}{2}$		y_1		1
f^2			0,8				0,8		
		$\nearrow$		$\searrow$		$\nearrow$		$\searrow$	
	0				0,512				0

On peut calculer que $f^2(0) = f^2(1) = 0$, $f^2(y_0) = f^2(y_1) = 0,8$ et $f^2(\frac{1}{2}) = 0,512$.

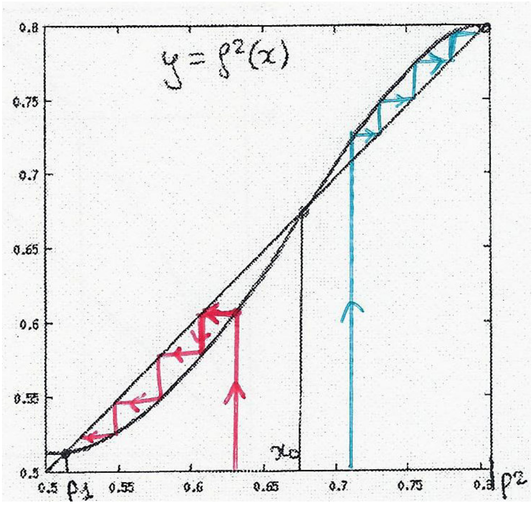
3. $f^2(\frac{1}{2}) = 0,512$ et $f^2(0,6) = 0,5701632$. Donc $f^2(x) - x > 0$ pour $x = \frac{1}{2}$ et $f^2(x) - x < 0$ pour $x = 0,6$. Comme la fonction $x \mapsto f^2(x) - x$ est continue, le théorème des valeurs intermédiaires implique qu'il existe $p_1 \in]\frac{1}{2}; 0,6[$ où cette fonction s'annule, c'est-à-dire $f^2(p_1) = p_1$. Ceci implique que p_1 est un point périodique dont la période divise 2. Or les seuls points fixes de f sont 0 et $x_0 = 0,6875$. Donc p_1 est un point périodique de période 2. Soit $p_2 = f(p_1)$. Ce qui précède montre que $f(p_2) = f^2(p_1) = p_1$ et $f^2(p_2) = f(p_1) = p_2$. Comme p_1 est périodique de période 2, $p_2 \neq p_1$, donc $f(p_2) \neq p_2$ et p_2 est également périodique de période 2.

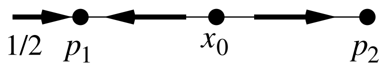
4. Les points fixes de f^2 sont les zéros de $f^2(x) - x$. Comme f est un polynôme de degré 2, la fonction f^2 est un polynôme de degré 4 (composition de polynômes), donc $f^2(x) - x$ est également un polynôme de degré 4. Ceci implique que $f^2(x) - x$ a au plus 4 racines. On sait déjà que $f^2(x) - x = 0$ pour $x \in \{0, \frac{1}{2}, p_1, p_2\}$, donc $f^2(x) - x$ a exactement 4 racines qui sont ces 4 valeurs. Autrement dit, f^2 n'a pas d'autre point fixe que $0, \frac{1}{2}, p_1$ et p_2.
Autre méthode : utiliser le tableau de variation de f^2 pour montrer que f^2 a au plus 4 points fixes (au plus un point fixe dans chaque intervalle de monotonie de f^2).

5. f est continue strictement décroissante sur $[\frac{1}{2}, 1]$, donc $f([\frac{1}{2}, p_2]) = [f(p_2), f(\frac{1}{2})] = [p_1, \frac{\lambda}{4}]$. Or $\frac{1}{2} < p_1 < \frac{\lambda}{4} < p_2$. Donc $f([\frac{1}{2}, p_2]) \subset [\frac{1}{2}, p_2]$.
Soit $g(x) = f^2(x) - x$. On cherche le signe de $g(x)$ pour $x \in I$. Par la question 4, les points $x \in I$ tels que $g(x) = 0$ sont exactement p_1, x_0 et p_2 (ces 3 points appartiennent bien à I, et $0 \notin I$). Comme g est une fonction continue, elle est de signe constant sur chacun des intervalles $[\frac{1}{2}, p_1[$, $]p_1, x_0[$, $]x_0, p_2[$. On évalue $g(x)$ en un point choisi dans chacun de ces intervalles pour connaître son signe. Remarquons qu'on a déjà calculé $f^2(\frac{1}{2})$ et $f^2(0,6)$ à la question 3, d'où :
• $g(\frac{1}{2}) = 0,512 - 0,5 = 0,012 > 0$,
• $g(0,6) = 0,5701632 - 0,6 = -0,0298368 < 0$.
Pour le dernier intervalle, on prend par exemple $x = 0,75$ et on trouve $g(0,75) = 0,018 > 0$. D'où le tableau de signe :

	$\frac{1}{2}$		p_1		x_0		p_2
$f^2(x) - x$		$+$	0	$-$	0	$+$	0

Comme $I \subset [\frac{1}{2}, y_1]$, la fonction f^2 est strictement croissante sur I par la question 2. On peut donc faire une analyse graphique de f^2 sur I (on ne l'a pas dessiné sur $[\frac{1}{2}, p_1]$, trop petit), et on en déduit que f^2 sur I a le portrait de phase ci-dessous à droite :





6. Montrons que, pour tout $x \in]0, 1[$, il existe un entier $M \geq 0$ tel que $f^M(x) \in I$.
• Si $x \in [y_0, y_1]$, alors $f(x) \in [\frac{1}{2}, \frac{\lambda}{4}] \subset I$.
• Soit $x \in]0, y_0]$. La preuve de la question 4 du problème I montre qu'il existe un entier $N \geq 0$ tel que $x < f(x) < \cdots < f^N(x) \leq \frac{1}{2}$ et $f^{N+1}(x) \in I$.
• Si $x \in [y_1, 1[$, alors $f(x) \in]0, \frac{1}{2}]$. Ce qui précède implique qu'il existe M tel que $f^M(x) \in I$.

Selon la question 5, si $x \in I \setminus \{x_0\}$, la suite $f^{2n}(x)$ converge soit vers p_1, soit vers p_2 ; par continuité, la suite $f^{2n+1}(x)$ converge respectivement vers p_2 ou p_1. Autrement dit, la trajectoire de x converge vers l'orbite périodique $\{p_1, p_2\}$.

Soit $x \in]0, 1[$ et $M \geq 0$ un entier tel que $f^M(x) \in I$. Il y a deux cas :
• si $f^M(x) = x_0$, alors $f^n(x) = x_0$ pour tout $n \geq M$.
• Si on n'est pas dans le cas précédent, alors la trajectoire de x converge vers l'orbite périodique $\{p_1, p_2\}$. Autrement dit, soit $\lim\limits_{n \to +\infty} f^{2n}(x) = p_1$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} f^{2n+1}(x) = p_2$, soit $\lim\limits_{n \to +\infty} f^{2n}(x) = p_2$ et $\lim\limits_{n \to +\infty} f^{2n+1}(x) = p_1$.

Finalement, si $x = 0$ ou $x = 1$, alors $f^n(x) = 0$ pour tout $n \geq 1$.

Remarque : on peut montrer qu'il existe un unique point $x_1 \neq x_0$ tel que $f(x_1) = x_0$, puis que x_1 a 2 antécédents par f, qui ont eux-mêmes 2 antécédents par f, etc. Finalement, il y a un nombre dénombrable de points x tels que $f^M(x) = x_0$ pour un certain entier $M \geq 0$.