Examen du 13 mai 2016 – durée 2 h

Documents, calculatrices et téléphones portables interdits

Exercice 1. Soit $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \frac{1}{2}(x^2 + x)$.
a) Déterminer le tableau de variations de f.
b) Déterminer les points fixes de f et dire s'ils sont attractifs ou répulsifs.
c) Montrer que $f([-\frac{1}{2}, +\infty[) \subset [-\frac{1}{2}, +\infty[$. Étudier le signe de $f(x) - x$ pour $x \in [-\frac{1}{2}, +\infty[$.
d) Donner le portrait de phase de f sur $[-\frac{1}{2}, +\infty[$.
e) Donner le portrait de phase de f sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. Soit $F: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $F(x) = 3x + \cos(x)$.
a) Montrer que F est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.
b) Soit $a, b \in \mathbb{R}$ avec $a < b$. Montrer que $F^n([a, b]) = [F^n(a), F^n(b)]$ pour tout entier $n \geq 1$, et montrer que la longueur de cet intervalle tend vers l'infini quand n tend vers l'infini.
c) Vérifier que si $x \equiv y \bmod 2\pi$, alors $F(x) \equiv F(y) \bmod 2\pi$.

Notation : si $\alpha \in \mathbb{R}$, on note $\bar{\alpha}$ la classe d'équivalence de α mod 2π, et $\mathcal{C} = \{\bar{\alpha} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$ (ensemble des points de $\mathbb{R}$ modulo 2π).
Soit $f: \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ définie par $f(\bar{\alpha}) = \overline{F(\alpha)}$ (autrement dit, $f(\bar{\alpha})$ est égale à la classe d'équivalence de $F(\alpha)$ modulo 2π). La fonction f est bien définie grâce à la question c).

d) Soit A un arc de cercle fermé de $\mathcal{C}$, qu'on écrit $A = \{\bar{\alpha} \in \mathcal{C} \mid \alpha \in [a, b]\}$, où a, b sont deux réels. Montrer que si $a < b$, alors il existe un entier $n \geq 0$ tel que $f^n(A) = \mathcal{C}$.
e) Rappeler la définition de sensibilité aux conditions initiales. Puis déduire de ce qui précède que f est sensible aux conditions initiales.

Exercice 3. Soit $f: [0, 1] \to [0, 1]$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} 3x & \text{si} \quad x \in [0, 1/3[\\ \frac{3}{2}(1 - x) & \text{si} \quad x \in [1/3, 1] \end{cases}$$

a) Montrer que f a un bon codage.
b) Combien y a-t-il de points $x \in [\frac{1}{3}, 1]$ qui sont périodiques de période 3 pour f ? Donner leur codage (on ne demande pas la valeur des points x).
c) Montrer que f est chaotique.
d) Soit $\varphi: [0, 1] \to [1, 2]$ la fonction définie par $\varphi(x) = x^3 + 1$. Montrer que φ est un homéomorphisme (c'est-à-dire une fonction continue bijective dont l'inverse est continue).
e) On pose $g = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}: [1, 2] \to [1, 2]$. Sans étudier la fonction g, déduire de ce qui précède que g est chaotique.

Barème indicatif : 7 — 7 — 6