Examen du 11 mai 2017 – durée : 2 heures

Documents, calculatrices et téléphones portables interdits

Exercice 1. Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^2 + c/4$, où $c \geq 0$ est un paramètre.

1. Déterminer le tableau de variations de f.

2. Déterminer, en fonction de c, le nombre de points fixes de f ainsi que leurs valeurs. Déterminer (toujours en fonction de c) le signe de $f(x) - x$.

3. Dans cette question, on se place dans le cas où $c = 2$. Montrer que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, la suite $(f^n(x))_{n\geq 0}$ est strictement croissante et que $\lim\limits_{n\to+\infty} f^n(x) = +\infty$.

4. Dans cette question, on se place dans le cas où $c = 3/4$.
a) Tracer (sommairement) le graphe de f et la droite $y = x$ (sur le même dessin). Donner le portrait de phase de f sur $[0, +\infty[$, puis le portrait de phase de f sur $\mathbb{R}$.
b) Soit $\varphi\colon [0, +\infty[\to [2, +\infty[$ la fonction définie par $\varphi(x) = e^x + 1$. Montrer que φ est une bijection continue de $[0, +\infty[$ dans $[2, +\infty[$ et que son inverse est continue.
On pose $g = \varphi \circ f \circ \varphi^{-1}\colon [2, +\infty[\to [2, +\infty[$. Sans étudier la fonction g, donner les points fixes et le portrait de phase de g.

Exercice 2. Soit $f\colon [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue. On suppose que pour tous $a, b \in [0,1]$ tels que $a < b$, il existe un entier $n \in \mathbb{N}$ tel que $f^n([a,b]) = [0,1]$.
1. Soit $\varepsilon > 0$ et $x \in [0,1]$. Montrer qu'il existe des points $y_0, y_1 \in [0,1]$ et un entier $n \geq 0$ tels que $|x - y_0| < \varepsilon$, $|x - y_1| < \varepsilon$, $f^n(y_0) = 0$ et $f^n(y_1) = 1$.
2. Rappeler la définition de la sensibilité aux conditions initiales, puis montrer que f est sensible aux conditions initiales.

Exercice 3. Soit $f\colon [0,1] \to [0,1]$ la fonction définie par

$$f(x) = \begin{cases} x^2 + \frac{3}{2}x & \text{si} \quad x \in [0, \frac{1}{2}] \\ -x^2 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{2} & \text{si} \quad x \in]\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

1. Montrer que f est continue.
2. Montrer qu'il existe un réel $\lambda > 1$ tel que $|f'(x)| \geq \lambda$ pour tout x où $f'(x)$ est définie.
3. Montrer que f a un bon codage, puis montrer que f est chaotique.
4. Donner les codages de tous les points x périodiques de période 4 vérifiant $x \in [\frac{1}{2}, 1]$ et $f(x) \in [0, \frac{1}{2}]$ (on ne demande pas la valeur des points x).

Exercice 4. Si $\alpha \in \mathbb{R}$, on note $\bar{\alpha}$ la classe d'équivalence de α mod 2π, et $\mathcal{C} = \{\bar{\alpha} \mid \alpha \in \mathbb{R}\}$.
On considère $f\colon \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ définie par $f(\bar{\alpha}) = \overline{2\alpha}$ (doublement de l'angle sur le cercle).
1. Soit $\alpha_0 = \frac{2\pi}{3}$. Montrer que $\bar{\alpha}_0$ est un point périodique.
2. Combien y a-t-il de points périodiques de période 3 dans $\mathcal{C}$?
3. Montrer que l'ensemble $\{\bar{\alpha} \in \mathcal{C} \mid \exists n \in \mathbb{N}, f^n(\bar{\alpha}) = \bar{\alpha}_0\}$ est dense dans $\mathcal{C}$.

Barème indicatif : 9 — 4 — 4 — 4