
Devoir n° 1

A remettre en TD le 9 ou 10 octobre 2012

Exercice 1. Soit $n \in \mathbb{N}$ et $m = n^2 + 3n + 1$. Donner une relation de Bézout entre n et m et montrer que n et m sont premiers entre eux.

Exercice 2. Soient $a = 26$ et $b = 47$.

- a) Montrer que a et b sont premiers entre eux.
- b) Montrer qu'il existe des entiers u et v tels que $1 + au = 2 - bv$. En déduire qu'il existe $n \in \mathbb{Z}$ tel que $n - 1$ soit multiple de a et $n - 2$ soit multiple de b .
- c) Déterminer tous les entiers n vérifiant cette propriété.
- d) Trouver la plus petite solution *positive* n .

Exercice 3. On dispose d'une boîte B de base carrée de côté ℓ millimètres et de hauteur h millimètres où ℓ et h sont des entiers, $0 < \ell < h$. On veut remplir cette boîte avec des cubes c tous identiques dont l'arête a est un entier naturel non nul, de façon à ne laisser aucun espace vide dans la boîte B .

- a) On connaît les dimensions de la boîte B : $\ell = 882$ millimètres et $h = 945$ millimètres. De quelles tailles doivent être les cubes c pour que l'on puisse remplir la boîte B comme désiré ? On commencera par donner la plus grande taille a convenable.
- b) Dans cette question, on connaît le volume de la boîte B , $v = 243000 \text{ mm}^3$ et on sait qu'on peut la remplir (comme désiré) avec des cubes c d'arête $a = 15$ millimètres mais non avec des cubes d'arête strictement plus grande. Montrer que la boîte B ne peut avoir que deux tailles possibles dont on donnera les dimensions.