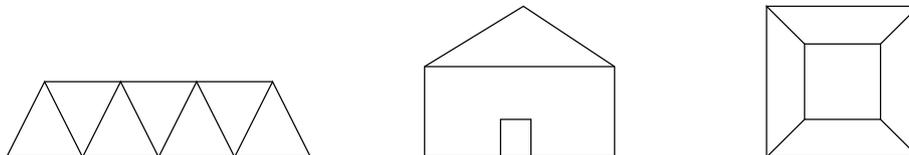
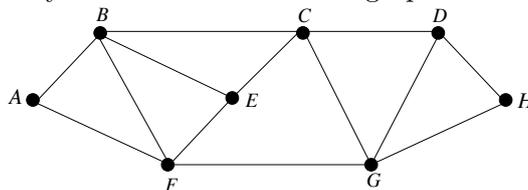


Feuille d'exercices n° 10

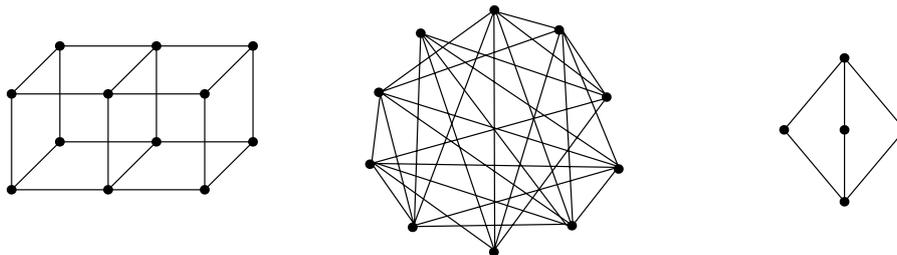
Exercice 1. On souhaite tracer les figures suivantes en ne passant qu'une seule fois sur chaque trait. Combien de fois au minimum faut-il lever le crayon pour chacune des figures ?



Exercice 2. Déterminer un cycle hamiltonien dans le graphe suivant :



Exercice 3. Dans chacun des graphes suivants, déterminer s'il existe un cycle hamiltonien. On ne demande pas nécessairement de donner un cycle s'il existe.



Exercice 4. Un voleur compte dérober un objet de valeur dans 10 grandes villes. De peur d'être reconnu, il ne peut repasser dans une ville où il a déjà commis son méfait. Sachant que le voleur se déplace en train et qu'il y a des trains de chaque ville vers au moins 5 autres villes, pourra-t-il se procurer tous les objets ? Modéliser d'abord le problème en termes de graphe.

Exercices supplémentaires

Exercice 5 *. Le code d'entrée d'un immeuble est composé de trois chiffres valant 0 ou 1 : la porte s'ouvre dès qu'on tape ces trois chiffres à la suite. Comme on a oublié le code, on cherche une suite de plus courte longueur contenant tous les codes possibles. Ainsi, frapper cette suite permettra d'ouvrir la porte, quel que soit le code.

- a) Construire le graphe orienté G dont les sommets sont les suites de deux chiffres valant 0 ou 1 et il y a une flèche de (x, y) vers (x', y') si $x' = y$. L'arête de (x, y) à (y, y') sera appelée xyy' .
- b) Si (x_1, x_2, \dots, x_n) est une suite de 0 et de 1, vérifier que les sommets $(x_1, x_2), (x_2, x_3), (x_3, x_4), \dots, (x_{n-1}, x_n)$ définissent un chemin orienté dans G et préciser les arêtes de ce chemin. Inversement, vérifier que tout chemin orienté correspond à une suite de 0 et de 1. Si le chemin est de longueur n , quelle est la longueur de la suite ?
- c) Montrer que le graphe G admet un cycle eulérien et en déterminer un.
- d) On cherche une suite de 0 et de 1 dans laquelle chaque suite de 3 caractères (par exemple 000, 111, 101, etc) apparaît exactement une fois. Que doit vérifier le chemin orienté associé à cette suite ? En déduire une suite de longueur minimale ayant cette propriété, et préciser sa longueur.

Exercice 6 *. Les pièces d'un jeu de dominos sont toutes les paires $\{i, j\}$ avec $0 \leq i \leq 6$, $0 \leq j \leq 6$ (les paires sont non ordonnées : $\{i, j\} = \{j, i\}$, autrement dit on peut retourner les dominos) et l'on peut aligner des pièces si on peut les écrire de la façon suivante : $\{i_1, i_2\}, \{i_2, i_3\}, \{i_3, i_4\}, \dots$

Exemple : on peut aligner les pièces $\{1, 3\}, \{3, 3\}, \{3, 0\}, \{0, 2\}$; la figure suivante représente les dominos correspondants :



Tom joue avec ses dominos en les alignant selon la règle ci-dessus, mais il a perdu le domino $\{6, 5\}$.

- Représenter le jeu de dominos par un graphe dans lequel les chemins correspondent à un alignement de dominos respectant la règle ci-dessus. Vaut-il mieux représenter les dominos par les sommets ou par les arêtes ?
- Il décide de les aligner les uns derrière les autres. Parviendra-t-il à les aligner tous ?
- Il décide maintenant de les disposer "en rond". Parviendra-t-il à les placer tous ?
- Il supprime tous les dominos portant un 6. Parviendra-t-il à placer tous les dominos restants en ligne ou "en rond" ?

Exercice 7 *. Cinq personnes dînant autour d'une table ronde se demandent combien de dîners elles peuvent organiser sans que jamais deux convives ne soient côte à côte plus d'une soirée.

- Traduire ce problème en un problème sur un graphe.
- Quelle est la réponse cherchée par ces cinq personnes ?
- Et si elles étaient sept, quelle serait la réponse ?