Feuille d'exercices n° 2

Théorèmes de Bézout et de Gauss

Exercice 1. Donner une relation de Bézout entre 25 et 11.

Exercice 2. Soit k un entier. Montrer que $2k+1$ et $9k+4$ sont premiers entre eux et donner une relation de Bézout entre eux.

Exercice 3. Déterminer tous les entiers x, y vérifiant :
a) $49x + 21y = 7$.
b) $49x + 21y = 10$.
c) $10x + 6y = 8$.

Exercice 4. Déterminer tous les entiers relatifs n tels que $8 \mid 15(n+1)$.

Exercice 5. Peut-on découper une ficelle de 100 cm en morceaux de 4 cm et de 5 cm de telle sorte qu'il n'y ait aucune perte ? Combien y a-t-il de solutions ?

Exercice 6. Un sachet de billes coûte 6 euros et un sachet de bonbons coûte 4 euros. Pierrot a reçu 15 euros d'argent de poche. Peut-il dépenser tout son argent en achetant des billes et des bonbons ? Si oui, quelles sont les solutions possibles ?

Exercice 7. Soit a, b, c trois entiers naturels tels que :
– a et b sont premiers entre eux,
– chacun des trois divise le produit des deux autres.
a) Démontrer que a et b divisent c.
b) Exprimer c en fonction de a et b.

Exercices supplémentaires

Exercice 8. Donner une forme caractéristique d'un couple d'entiers strictement positifs a et b dont le pgcd est égal à leur différence $a - b$.

Exercice 9. m, n, k sont des entiers strictement supérieurs à 1. Soit u, v des entiers relatifs. Montrer que $(um + vn)^k$ peut s'écrire sous la forme $u^k m^k + nA$, où A est un entier relatif. En déduire que m^k et n sont premiers entre eux si et seulement si m et n sont premiers entre eux.

Exercice 10*. Pour quels $k \in \mathbb{Z}$ les entiers $2k-1$ et $9k+4$ sont-ils premiers entre eux ?

Exercice 11. Relation de Bézout : un algorithme adapté à la programmation.
Soit a et b des entiers naturels non nuls. On applique l'algorithme d'Euclide à a et b. On note $q_1, \ldots, q_n$ les quotients et $r_1, \ldots, r_n$ les restes obtenus, avec r_n le dernier reste non nul. On note $r_0 = b$. On pose $u_0 = 0$, $v_0 = 1$, $u_1 = 1$, $v_1 = -q_1$, et pour $i = 2, \ldots, n$, on définit u_i et v_i par récurrence : $u_i = u_{i-2} - q_i u_{i-1}$ et $v_i = v_{i-2} - q_i v_{i-1}$.
Montrer que $au_i + bv_i = r_i$ pour tout $i \in \{0, \ldots, n\}$. En déduire une relation de Bézout entre a et b.

Remarque : la méthode vue en cours pour trouver une relation de Bézout nécessite de stocker en mémoire toutes les étapes de l'algorithme d'Euclide. L'algorithme dans cet exercice a besoin de moins de mémoire car il fait les calculs pas à pas : on peut calculer u_i et v_i juste après avoir fait la division euclidienne $r_{i-2} = q_i r_{i-1} + r_i$ (i-ème étape de l'algorithme d'Euclide), et on a seulement besoin des résultats des étapes $i, i-1$ et $i-2$; quand on passe à l'étape $i+1$ on peut oublier les valeurs de $r_{i-2}, u_{i-2}, v_{i-2}$ et q_i.

Exercice 12. Virée au centre commercial avec les copains. On a dépensé en tout 188 euros, en achetant des CD à 25 euros et des jeans à 21 euros. Combien de CD a-t-on acheté ?