Feuille d'exercices n° 4

pgcd et ppcm

Exercice 1. Un confiseur fait 2 types de sachets de bonbons : des sachets A contenant uniquement des bonbons pesant 6 grammes, et des sachets B contenant uniquement des bonbons pesant 15 grammes. Il veut que les 2 types de sachets aient le même poids P. Quelles sont les valeurs possibles de P ?

Exercice 2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Déterminer, en fonction de n, le pgcd et le ppcm et $a = 10^n$ et de $b = 4^n$.

Exercice 3. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer le ppcm de $a = 2n^2 + 5n + 3$ et $b = n + 2$.

Congruences

Exercice 4. Les propositions suivantes sont-elles vraies ou fausses ?
a) $256 \equiv 9\ (23)$.
b) Tout entier est congru modulo 6 à un des entiers $0, 1, 2, 3, -1$ ou -2.

Exercice 5. Soient $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ dont les restes modulo 11 sont 7 et 2 respectivement. Donner le reste modulo 11 de $a^2 - b^2$.

Exercice 6. Un code barre est une suite de 12 chiffres $c_{12}c_{11} \dots c_1$ suivie d'un chiffre de contrôle c_0 vérifiant $c_{12} + 3c_{11} + c_{10} + 3c_9 + c_8 + 3c_7 + c_6 + 3c_5 + c_4 + 3c_3 + c_2 + 3c_1 + c_0 \equiv 0\ (10)$ (les coefficients sont alternativement 1 et 3, en commençant par 1).
La suite de 12 chiffres attribuée à un produit est 308612610032. Calculer son chiffre de contrôle.

Exercice 7. a) Montrer que si n est impair alors $n^2 \equiv 1\ (8)$.
b) Montrer de même que tout nombre pair n vérifie $n^2 \equiv 0\ (8)$ ou $n^2 \equiv 4\ (8)$.
c) Quels sont les entiers x et y tels que $x^2 + y^2 \equiv 2\ (8)$?

Exercices supplémentaires

Exercice 8. Deux cyclistes effectuent des tours de piste. Le premier met 3 min 18 s, le second 3 min 45 s pour chaque tour. Ils partent ensemble sur la ligne de départ. Au bout de combien de temps se retrouveront-ils à nouveau tous les deux ensemble sur cette ligne de départ ?

Exercice 9. On considère l'équation $(E) : x^2 + y^2 = 7z^2$, avec x, y, z des entiers naturels.
a) Quels sont les entiers congrus à un carré modulo 7 ?
b) Montrer que : $x^2 + y^2 \equiv 0\ (7)$ si et seulement si $x \equiv 0\ (7)$ et $y \equiv 0\ (7)$.
c) Déduire de ce qui précède que si (a, b, c) est une solution de (E) alors a et b sont divisibles par 7. En déduire que c est divisible par 7 .
d) Soit $r \in \mathbb{N}^*$. Supposons que (a, b, c) est une solution de (E) telle que 7^r divise a, b et c. Notons a', b', c' les entiers tels que $a = 7^r a'$, $b = 7^r b'$ et $c = 7^r c'$. Montrer que (a', b', c') est aussi une solution de (E).
e) En déduire que $(0, 0, 0)$ est l'unique solution de (E) *(on pourra raisonner par l'absurde).*

Exercice 10. Trouver tous les entiers relatifs n tels que $n^2 + n + 1$ soit divisible par 7.

Exercice 11. Soit $u_n = 4^{2n+1} + 3^{n+2}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$.
a) Montrer que pour tout $n \geq 0$, $u_{n+1} \equiv 3 \cdot u_n\ (13)$.
b) En déduire que pour tout $n \geq 0$, u_n est un multiple de 13.

Exercice 12. a) Calculer le reste modulo 9 de $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9$.
b*) Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, calculer le reste modulo n de $\displaystyle\sum_{k=1}^{n} k$ (distinguer selon la parité de n).