Feuille d'exercices n° 5

Congruences et divisibilité

Exercice 1. Soit $\overline{a_r a_{r-1} \ldots a_1 a_0}$ l'écriture décimale d'un entier n (c'est-à-dire que $a_r, \ldots, a_0$ sont des chiffres entre 0 et 9 et $n = a_r \cdot 10^r + a_{r-1} \cdot 10^{r-1} + \cdots + a_1 \cdot 10^1 + a_0$).

a) Montrer que $n \equiv \sum_{i=0}^{r} (-1)^i a_i \ (11)$.

b) En déduire un critère de divisibilité par 11 par analogie avec le critère de divisibilité par 9.

c) Les nombres 6435 et 7812 sont-ils divisibles par 11 ?

Équations de congruences

Exercice 2.

a) Existe-t-il un entier x tel que $5x \equiv 1 \ (16)$? Si oui, déterminez-en un.

b) Existe-t-il un entier x tel que $42x \equiv 1 \ (135)$? Si oui, déterminez-en un.

Exercice 3. Déterminer le nombre d'entiers $x \in \{0, 1, \ldots, 20\}$ pour lesquels il existe $u \in \mathbb{Z}$ tel que $xu \equiv 1 \ (21)$.

Exercice 4. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ les équations :

a) $3x \equiv 2 \ (4)$. b) $3x \equiv 2 \ (6)$. c) $6x \equiv 27 \ (45)$.

Exercice 5. Un code barre est une suite de 12 chiffres $c_{12}c_{11} \ldots c_1$ suivie d'un chiffre de contrôle c_0 vérifiant $c_{12} + 3c_{11} + c_{10} + 3c_9 + c_8 + 3c_7 + c_6 + 3c_5 + c_4 + 3c_3 + c_2 + 3c_1 + c_0 \equiv 0 \ (10)$ (les coefficients sont alternativement 1 et 3, en commençant par 1).

Dans le code barre suivant, un des chiffres est illisible (on l'a remplacé par x) : $400x015135119$. Que vaut ce chiffre ?

Exercices supplémentaires

Exercice 6. Inventer un critère de divisibilité par 99.

Exercice 7. Déterminer tous les entiers relatifs x tels que $5x^2 \equiv 2 \ (17)$.

Exercice 8. Soient a et b deux entiers tels que $a^2 + b^2$ soit divisible par 11. Montrer que a et b sont divisibles par 11.

Exercice 9. Soit p un nombre premier et k un entier naturel non nul. Déterminer le nombre d'entiers $x \in \{0, 1, \ldots, p^k - 1\}$ pour lesquels il existe $u \in \mathbb{Z}$ tel que $xu \equiv 1 \ (p^k)$.

Exercice 10 *. Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système suivant :

$$\begin{cases} x & \equiv & 4 & (6) \\ x & \equiv & 7 & (9) \end{cases}$$

Exercice 11.

a) Montrer que si n est un entier naturel impair, alors $10^{3n} + 1$ est divisible par 13.

b) En déduire que le nombre 102 102 001 001 est divisible par 13.

Exercice 12.

a) Déterminer les restes modulo 7 de $10, 10^2, 10^3, 10^4$ et 10^5.

b) En déduire que 111 111 est multiple de 7.

c*) Peut-on trouver un critère de divisibilité par 7.