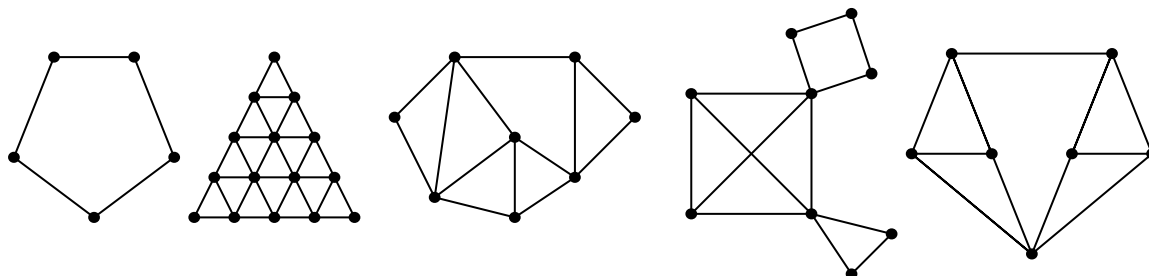


FEUILLE D'EXERCICES N°6

Exercice 1. Pour chacun des graphes suivants :

- indiquez un sous-graphe complet ayant le plus grand nombre de sommets possibles
- calculez $d + 1$, où d est le plus grand degré des sommets
- trouvez le nombre chromatique.



Exercice 2. Un groupe de 8 personnes doit participer à deux réunions. A la première réunion, ils sont tous assis autour d'une table ronde. Comme l'entente est totale, pour la seconde réunion, chacun des participants, non seulement ne veut pas se retrouver à côté de l'un ou l'autre de ses voisins, mais ne veut pas non plus qu'ils soient assis à la même table.

a) Combien de tables au minimum seront alors nécessaires ? Combien de personnes au maximum pourront s'asseoir à une même table ?

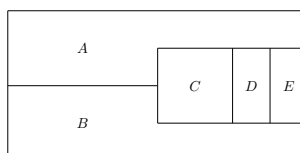
b) On suppose maintenant qu'il y a 9 participants et que l'entente est tout aussi cordiale. Que se passera-t-il alors ?

Exercice 3. Pendant un festival, on veut organiser des tournois de scrabble (S), échecs (E), go (G), dames (D), tarot (T) et master-mind (M). Plusieurs personnes se sont inscrites à la fois pour les tournois E, S, G, d'autres personnes pour les tournois G, D, M, et enfin d'autres personnes pour les tournois M, T, S. Il est entendu qu'une participation simultanée à plusieurs tournois est impossible et que les organisateurs veulent satisfaire tout le monde.

a) Quel est le nombre maximum de tournois qui pourraient se dérouler en même temps ?

b) En sachant que chaque tournoi doit durer au maximum 3 heures, proposer un horaire des tournois nécessitant une durée minimale et respectant bien sûr les choix des participants.

Exercice 4. Voici la carte schématique d'un pays imaginaire avec ses 5 régions A, B, C, D et E.



On veut colorier cette carte de telle manière que deux régions frontalières aient des couleurs différentes. Combien de couleurs au minimum faudra-t-il prévoir ?

Exercice 5. Les lettres A, B, C, D, E, F, G et H désignent huit poissons. Dans le tableau ci-dessous, un rond signifie que les poissons peuvent cohabiter dans le même aquarium, et une croix le contraire (le plus gros mangeant le plus petit).

	A	B	C	D	E	F	G	H
A	o	x	x	x	o	o	x	x
B	x	o	o	o	x	x	x	o
C	x	o	o	x	o	x	x	x
D	x	o	x	o	x	o	o	x
E	o	x	o	x	o	x	x	o
F	o	x	x	o	x	o	o	o
G	x	x	x	o	x	o	o	o
H	x	o	x	x	o	o	o	o

- Représentez cette situation par un graphe approprié.
- Trouvez le nombre chromatique de ce graphe.
- Déduisez-en le nombre minimum d'aquariums nécessaires pour loger ces huit poissons.

Exercice 6. On se donne n points dans l'espace. Certains sont reliés par des segments, d'autres non, et chacun des points est relié au maximum à 3 autres points.

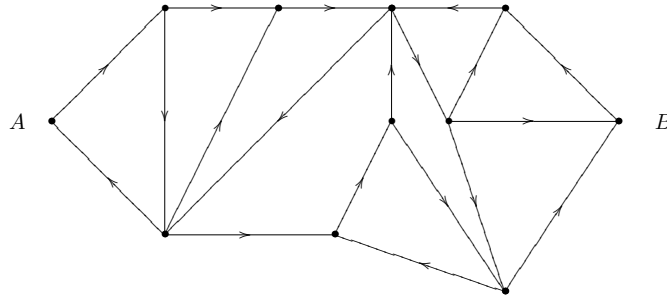
Prouver qu'il existe au moins $\frac{n}{4}$ points tels que 2 d'entre eux ne soient pas reliés.

Exercice 7. Pour $n \geq 3$, on considère un échiquier $n \times n$, et le graphe G_n défini comme suit :

- Les sommets de G_n sont les n^2 cases de l'échiquier.
- Une case a est reliée à une case b , si un cavalier placé sur la case a peut aller sur la case b au coup suivant.

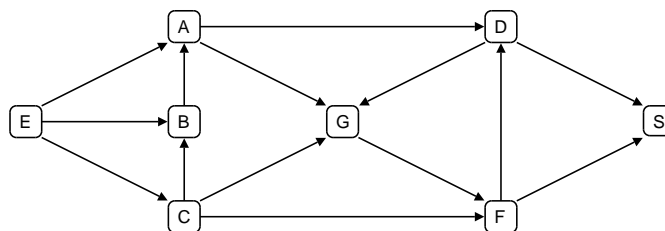
- Dessiner le graphe G_4
- Pour n quelconque, quel est le nombre chromatique de G_n ?

Exercice 8. Le graphe suivant représente une partie d'une ville où toutes les rues sont à sens unique .



Quel est le nombre de manières d'aller en voiture, en 5 étapes, de A à B ? Quel est le nombre de manières de faire le même itinéraire à pied (on n'est donc plus obligé de respecter les sens interdits) ?

Exercice 9 Pour traverser une chaîne de montagnes, il faut passer par plusieurs sommets, reliés entre eux par des voies ne pouvant être franchies que dans un seul sens. On donne ci-dessous le graphe associé à cette situation (E est le point d'entrée et S le point de sortie). L'office de tourisme cherche toutes les traversées qui partent de E et arrivent en S en 4,5 ou 8 étapes (une étape est le passage d'un sommet à un autre, ou du départ à un sommet, ou d'un sommet à l'arrivée).



Les sommets étant classés dans l'ordre E, A, B, C, G, D, F, S, on note M la matrice d'adjacence du graphe. Après calcul de ses puissances successives, on trouve que :

$$M^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 3 & 3 & 2 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

- la première ligne de M^3 est : 0 1 0 0 2 2 2 2

- la première ligne de M^5 est : 0 0 0 0 3 2 3 5

- la première ligne de M^6 est : 0 0 0 0 2 3 3 5

- la première ligne de M^7 est : 0 0 0 0 3 3 2 6

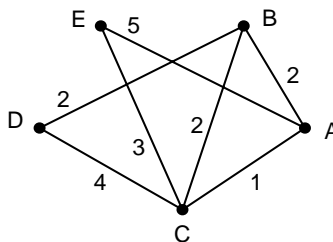
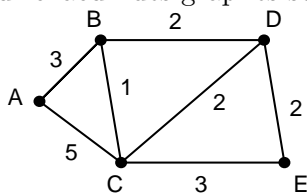
- la première ligne de M^8 est : 0 0 0 0 3 2 3 5

a) Combien de traversées peut-on faire en 4 (respectivement 5) étapes ?

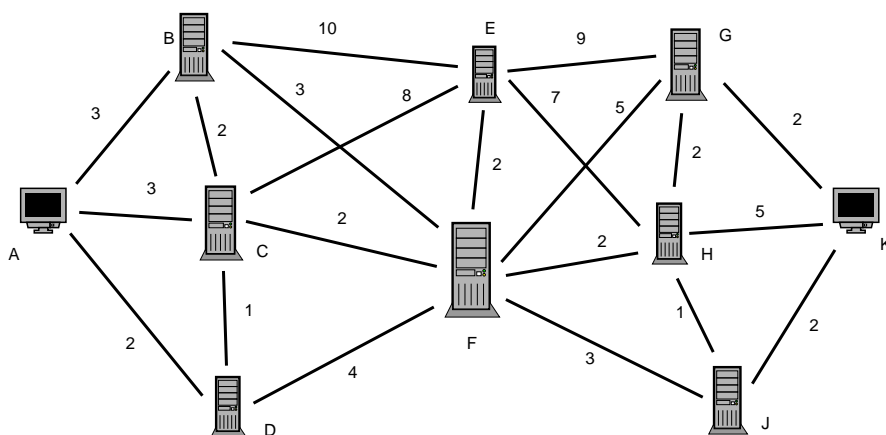
b) Trouver toutes les traversées en 8 étapes.

Exercice 10. Soit G un graphe orienté à n sommets et de matrice d'adjacence M . Montrez que si M^n n'est pas nulle, alors le graphe G contient des cycles. Etudiez la réciproque.

Exercice 11. Pour chacun des graphes suivants, trouvez une plus courte chaîne entre A et E .



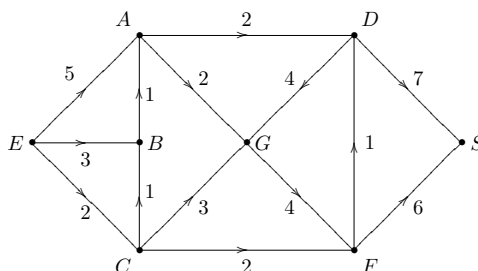
Exercice 12 Le réseau informatique d'une entreprise est représenté par le graphe qui suit. Les sommets représentent les serveurs et les arêtes indiquent le temps nécessaire pour faire passer une information d'un ordinateur à l'autre.



a) Un employé travaillant sur l'ordinateur A envoie un document à un collègue utilisant l'ordinateur K . Combien de temps faudra-t-il au minimum pour que le document lui parvienne ?

b) Le serveur F tombe subitement en panne à cause d'un virus. Combien de temps faut-il maintenant pour envoyer un document de A à K ?

Exercice 13. Le graphe suivant représente un réseau routier (avec des sens interdits), où on a indiqué les distances en kilomètres. Quel est l'itinéraire le plus court qui relie E à S ?



Exercice 14. La matrice suivante donne en heures les durées des vols entre certaines villes v_1, v_2, \dots, v_6 :

$$\begin{pmatrix} 0 & 3 & \infty & 5 & \infty & \infty \\ 3 & 0 & 5 & 2 & 4 & \infty \\ \infty & 4 & 0 & \infty & 4 & 3 \\ 6 & 2 & \infty & 0 & 4 & 4 \\ \infty & 4 & 4 & 5 & 0 & 2 \\ \infty & \infty & 5 & 4 & 3 & 0 \end{pmatrix}$$

Le term (i, j) de cette matrice est égal à ∞ lorsqu'il n'existe pas de vol de v_1 à v_j .

a) Quel est l'itinéraire le plus rapide de v_1 à v_6 ?

b) On suppose maintenant qu'il y a une escale obligatoire de respectivement 2, 3, 1, 1, 4, 5 heures aux villes v_1, v_2, \dots, v_6 . Quel est alors l'itinéraire le plus rapide de v_1 à v_6 ?

Exercice 15. Le prince est parti à la recherche du trésor; il peut accomplir les actions suivantes:

- Aller à la ville du marché, en contournant la rivière par un gué : 4 jours.
- Traverser la forêt : 1 jour.
- Depuis la forêt, abattre des arbres pour traverser la rivière, et se rendre à la ville du marché : 2 jours.
- Depuis la forêt, se rendre à la capitale provinciale en traversant les marais : 7 jours.
- S'équiper chaudement au marché, et partir pour le col du nord : 5 jours.
- Trouver un cheval au marché, et se rendre à la capitale provinciale par la route : 3 jours.
- Depuis le col du nord, se rendre au refuge du devin : 3 jours.
- Depuis la capitale provinciale, se rendre au refuge du devin : 4 jours.
- Se rendre de la capitale provinciale au palais du roi, en étant retardé par des contrôles : 10 jours.
- Au sortir du devin, partir directement chercher l'épée, et la trouver après s'être perdu par manque de carte : 20 jours.
- Au sortir de chez le devin, au mépris de ses avis, se rendre directement à la grotte et tuer le dragon avec un canif : 32 jours (il faut du temps pour le tuer avec un canif).
- Bien conseillé par le devin, prendre un raccourci pour le palais du roi : 5 jours.
- Un fois arrivé au palais du roi, séduire la bibliothécaire, puis trouver les cartes qui expliquent l'emplacement de l'épée et du trésor : 6 jours.
- En utilisant les cartes trouvées dans la bibliothèque, faire tout le tour de la montagne, et traverser un labyrinthe qui mène directement au trésor : 30 jours.
- En utilisant les cartes, aller chercher l'épée pour combattre le dragon : 7 jours.
- S'entraîner à l'épée, puis tuer le dragon : 8 jours.
- Une fois l'épée trouvée, au lieu d'affronter le dragon, utiliser l'épée pour creuser un tunnel par dessous, et déboucher directement dans la cachette du trésor : 18 jours.
- Une fois le dragon tué, résoudre l'énigme qui ouvre la cachette du trésor : 9 jours.

Comment doit-il faire pour récupérer le trésor le plus vite possible? Quel temps lui faudrait-il?