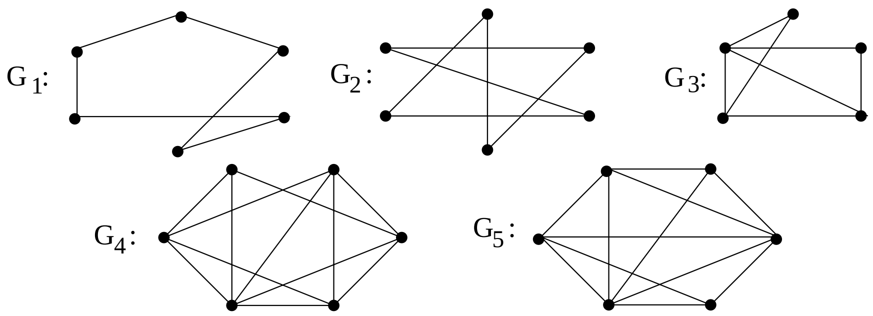
Feuille d'exercices n° 7

Exercice 1. Dessiner le graphes suivant : les sommets sont les faces d'un cube, deux sommets sont reliés si les faces correspondantes ont une arête du cube en commun.

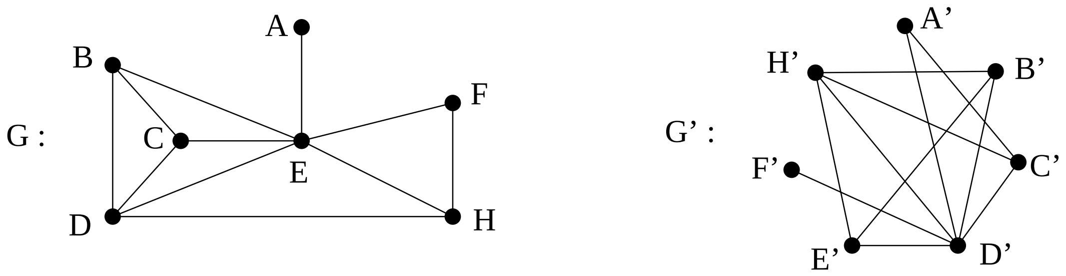
Exercice 2. Tracer le graphe orienté dont les sommets sont les entiers 7, 1, 5, 35, 13, 11, 65 et il y a une arête orientée de n vers m si n est un diviseur de m.

Exercice 3.
a) Quel est le degré maximal d'un graphe simple à n sommets ? Quel est le nombre maximal d'arêtes d'un graphe simple à n sommets ?
b) Peut-on construire un graphe simple ayant 5 sommets et 11 arêtes ?
c) Peut-on construire un graphe simple à 5 sommets dont les degrés sont 2, 3, 4, 5, 6 ?

Exercice 4. a) Les graphes G_1 et G_2 sont-ils isomorphes ?
Même question avec : b) les graphes G_1 et G_3 ; c) les graphes G_4 et G_5 ;



Exercice 5. Les graphes G et G' sont-ils isomorphes ?



Exercice 6. Existe-t-il un graphe simple à 7 sommets tel que la liste des degrés des sommets est 1, 2, 3, 3, 3, 4, 5 ?

Exercice 7. Dans un groupe de 20 enfants, est-il possible que 7 d'entre eux aient chacun exactement 3 amis, 9 d'entre eux en aient exactement 4, et 4 d'entre eux exactement 5 ?

Exercice 8. Montrer que dans un graphe le nombre de sommets impairs est toujours pair.

Exercices supplémentaires

Exercice 9. [*] Le conseil municipal d'une ville comprend 7 commissions. Tout conseiller municipal fait partie de 2 commissions exactement. Deux commissions quelconques ont exactement un conseiller en commun. Combien y a-t-il de membres dans le conseil municipal ?

Exercice 10. On représente les molécules par des graphes. Un atome de carbone est de valence 4, c'est-à-dire que le sommet correspondant dans le graphe est de degré 4. Un atome d'oxygène est de valence 2, et un atome d'hydrogène est de valence 1. Les molécules suivantes peuvent-elles exister ?
a) C_2H_6O b) CH_3 c) CH_2O.

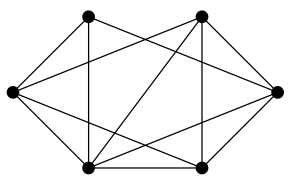
Exercice 11. Un tournoi de football amateur organisé pendant un week-end réunit 7 équipes. Les contraintes de temps permettent à chaque équipe de rencontrer au plus cinq des autres équipes.

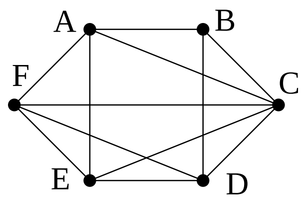
1. Est-il possible de faire jouer à chaque équipe exactement 5 matches ?
2. Est-il possible de faire jouer à chaque équipe exactement 4 matches ?

Exercice 12. [*] Soit G un graphe orienté. On appelle $d^+(s)$ le nombre d'arêtes orientées ayant s comme extrémité initiale et $d^-(s)$ le nombre d'arêtes orientées ayant s comme extrémité finale ($d^+(s)$ et $d^-(s)$ sont les degrés sortants et entrants d'un sommet dans un graphe orienté).
a) Montrer que $\sum_{s\in S} d^+(s) = \sum_{s\in S} d^-(s)$, où S est l'ensemble des sommets de G.
b) Un tournoi de football intercommunal réunit 7 équipes. Chaque équipe rencontre toutes les autres équipes, soit à domicile, soit dans le stade de la commune adverse. Le stade de la commune A étant inondé, l'équipe A ne jouera aucun match à domicile. On voudrait que les autres équipes jouent chacune autant de matchs à domicile. Est-ce possible ? Même question s'il y a 6 équipes au lieu de 7.

Exercice 13. Donnez deux graphes ayant chacun 5 sommets et 7 arêtes mais qui ne sont pas isomorphes.

Exercice 14. Les graphes G et G' sont-ils isomorphes ?

G :


G' :


Exercice 15. Un mot binaire est une suite ordonnée de 0 et de 1. Par exemple 010 est un mot binaire de longueur 3. On dit que deux mots binaires de même longueur diffèrent de k caractères si les suites ordonnées ont k termes différents. Par exemple 010 et 110 diffèrent par un seul caractère, alors que 010 et 001 diffèrent par deux caractères.
a) On considère le graphe dont les sommets sont les mots binaires de longueur 3, dans lequel 2 mots sont reliés par une arête quand ils ne diffèrent que par un seul caractère. Quel est le degré de chaque sommet ? Donner l'ensemble des mots qui ne sont pas voisins de 010.
b) Il est possible qu'au cours de la transmission d'un mot on ait une erreur portant sur un et un seul caractère. Donner un mot binaire m de longueur 3 tel que les mots m et 010 ne peuvent pas être confondus après transmission (une erreur de transmission est possible dans chacun des mots).