
Partiel de maths discrètes

3 novembre 2006 – Durée : 2 heures

Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Toutes les réponses doivent être justifiées.

Exercice 1.

a et b sont deux entiers naturels. Le pgcd de a et b est égal à 2. Quand on applique l'algorithme d'Euclide à a et b , le premier reste nul est r_4 et les quotients successifs obtenus sont :

$q_1 = 1, q_2 = 3, q_3 = 1, q_4 = 2$. Déterminer a et b .

Exercice 2.

Déterminer l'ensemble des couples d'entiers relatifs (x, y) tels que $6x + 15y = 63$. Combien y a-t-il de solutions qui sont des couples d'entiers naturels ?

Exercice 3. Un confiseur fait 2 types de sachets de bonbons : des sachets A contenant uniquement des bonbons pesant 6 grammes, et des sachets B contenant uniquement des bonbons pesant 15 grammes. Il veut que les 2 types de sachets aient le même poids P . Quelles sont les valeurs possibles de P ?

Exercice 4.

a) Déterminer tous les entiers relatifs a tels que $5a \equiv 2 \pmod{7}$.

b) Déterminer tous les entiers relatifs x tels que $5x^2 \equiv 2 \pmod{7}$.

Exercice 5.

Déterminer le plus petit entier naturel n tel que $2^{52} \equiv n \pmod{11}$.

Exercice 6.

1. On suppose qu'il existe deux entiers relatifs premiers entre eux p et q tels que

$$\frac{p^2}{q^2} = 2.$$

a) Montrer que 2 divise p^2 , puis que 2 divise p .

b) Montrer que 2 divise q .

2. En déduire que $\sqrt{2}$ est irrationnel, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de nombre rationnel $r = \frac{a}{b}$ (où $a \in \mathbb{Z}, b \in \mathbb{Z}^*$) tel que $r^2 = 2$.

Exercice 7.

Le bus n° 21 passe toutes les 7 minutes, et le prochain bus n° 21 passera dans 2 minutes. Le bus n° 17 passe toutes les 10 minutes au même arrêt, et le prochain bus n° 17 passera dans 1 minute. Dans combien de minutes les 2 bus passeront-ils en même temps pour la première fois ?

Barème indicatif : 3 - 4 - 3 - 2,5 - 1,5 - 4 - 4