

**7 janvier 2011 – Durée : 2 heures**

*Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.*

**Exercice 1.** Lors d'une soirée réunissant 10 personnes, est-il possible que 5 d'entre elles aient serré la main à 3 personnes (exactement), 2 d'entre elles aient serrés la main à 5 personnes, et 3 d'entre elles aient serrés la main à 4 personnes ?

a) Le camion-poubelle doit passer par toutes les rues. Peut-il passer une fois et une seule par chaque rue? Si oui, indiquez un itinéraire possible.

a) Le graphe  $G_3$  ci-contre possède-t-il un cycle hamiltonien ? un cycle eulérien ?

$G_3$ :

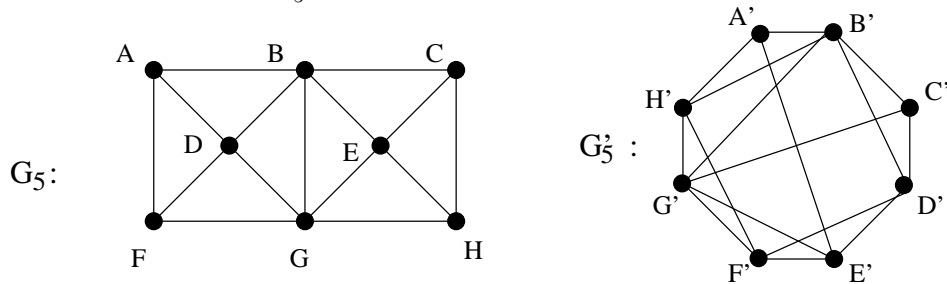
A bipartite graph with two rows of four vertices. The top row vertices are labeled A, B, C, D from left to right, and the bottom row vertices are labeled E, F, G, H from left to right. Every vertex in the top row is connected to every vertex in the bottom row by a straight line edge, forming a complete bipartite graph  $K_{4,4}$ .

	A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
A			x						x	
B			x		x		x		x	x
C	x	x		x						
D			x		x				x	
E		x		x				x		
F							x			
G		x				x			x	
H					x				x	x
I	x	x		x			x	x		
J		x						x		

b) Combien d'avions au minimum faut-il prendre pour aller de A à F? Indiquer un itinéraire possible.

c) L'aéroport B est fermé à cause de la neige et l'aéroport I est fermé à cause d'une éruption volcanique : aucun avion ne peut décoller ou atterrir en B ou I. Est-il encore possible d'aller en avion de A à F ? Si oui, combien d'avions au minimum faut-il prendre ?

**Exercice 5.** Les graphes  $G_5$  et  $G'_5$  sont-ils isomorphes ?

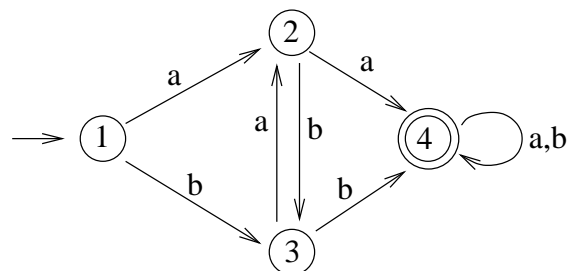


**Exercice 6.** 8 produits chimiques, notés P1, P2, P3, P4, P5, P6, P7, P8, doivent être transportés en camions. Certains sont incompatibles entre eux et ne peuvent pas être transportés dans le même camion. On représente par une croix dans le tableau ci-dessous les incompatibilités entre produits

	P1	P2	P3	P4	P5	P6	P7	P8
P1		x	x	x		x		
P2	x			x	x	x		x
P3	x						x	x
P4	x	x			x	x		x
P5		x		x		x	x	x
P6	x	x		x	x		x	
P7			x		x	x		x
P8		x	x	x	x		x	

On cherche le nombre minimal de camions nécessaires pour transporter ces produits. Modélisez d'abord la situation par un graphe, traduisez la question en terme de graphes, puis donnez le nombre minimal de camions nécessaires et indiquez une répartition possible des produits dans les camions.

**Exercice 7.** On considère l'automate suivant :



- Les mots aab, aba, ababa, ababbba sont-ils reconnus par cet automate ?
- Quel est l'ensemble des mots reconnus par cet automate ?

**Exercice 8 (bonus).**

Montrer que dans un graphe simple il existe au moins 2 sommets ayant des degrés égaux.

---

*Barème indicatif : 1,5 - 4 - 4 - 3 - 2 - 3 - 2,5 — bonus : 2*