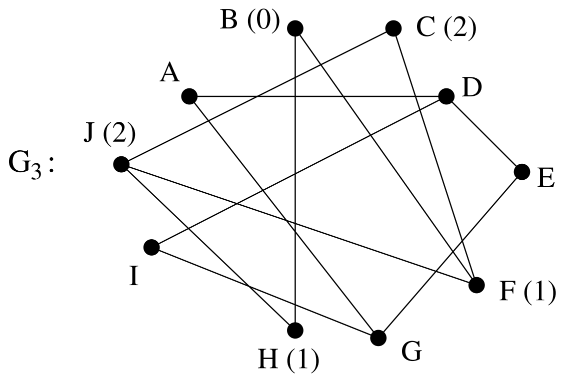
Corrigé de l'examen de maths discrètes

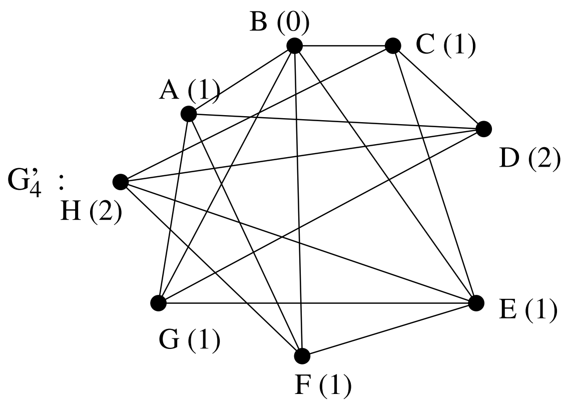
Exercice 1. La question se traduit en termes de graphe de la façon suivante : existe-t-il un graphe de 8 sommets avec 2 sommets de degré 4, 1 sommet de degré 2 et 5 atomes de degré 5 ? Si un tel graphe existait, la somme des degrés de ses sommets serait égale à $2 \times 4 + 1 \times 2 + 5 \times 1 = 15$, qui est un nombre impair. Or, par le théorème des poignées de mains, la somme des degrés des sommets d'un graphe est toujours paire, donc ce graphe n'existe pas. Conclusion : il n'existe pas de molécule contenant 2 atomes C, un atome O et 5 atomes H.

Exercice 2. La liste des degrés des sommets de G_1 est, par ordre croissant : 2, 2, 3, 3, 4, 4. La liste des degrés des sommets de G_2 est : 2, 3, 3, 3, 3, 4. Ces listes sont différentes, ce qui implique que G_1 et G_2 ne sont pas isomorphes.

Exercice 3.
a) On applique l'algorithme de distance dans G_3 en partant de B. On obtient le résultat ci-dessous. Comme certains sommets n'ont pas d'étiquette (par exemple A), le graphe G_3 n'est pas connexe.
b) L'algorithme de distance dans G_3 en partant de B (ci-dessous) montre que la distance entre les sommets B et C est égale à 2. De plus, il permet de trouver tous les tous les chemins réalisant cette distance. Il y en a un seul : BFC.



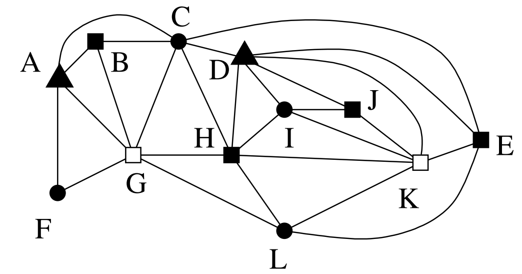
Exercice 4.
a) Les degrés des sommets de G_4 sont les suivants : $d(A) = d(D) = d(G) = d(H) = 4$, $d(B) = d(C) = d(E) = d(F) = 5$. Le graphe G_4 a $n = 8$ sommets, qui sont tous de degré supérieur ou égal à $\frac{n}{2} = 4$. Par conséquent, le théorème de Dirac implique que G_4 a un cycle hamiltonien.
b) Les sommets B, C, E, F ont un degré impair, donc le graphe G_4 n'a pas de chemin eulérien par le théorème d'Euler.
La somme des degrés des sommets de G_4 vaut $4 \times 4 + 4 \times 5 = 36$. Par le théorème des poignées de mains, elle est égale à deux fois le nombre d'arêtes, donc G_4 a $36/2 = 18$ arêtes. Comme G_4 n'a pas de chemin eulérien, un chemin ne passant pas deux fois par une même arête contient au plus $18 - 1 = 17$ arêtes. Si on enlève une arête entre C et F (ce sont deux sommets voisins de degré impair tous les deux), on obtient le graphe G'_4 ci-contre, qui contient 17 arêtes.



Dans G'_4, tous les sommets sont de degré pair, sauf B et E. De plus, l'algorithme de distance partant du sommet B (ci-dessous) montre que G'_4 est connexe. Par le théorème d'Euler, G'_4 a un chemin eulérien ; il contient donc les 17 arêtes de G'_4. Ce chemin est aussi un chemin dans G_4, ne passant pas deux fois par une même arête, et contenant 17 arêtes.
Conclusion : Le nombre maximal d'arêtes que peut contenir un chemin dans G_4 ne passant pas deux fois par une même arête est égal à 17.

Exercice 5.
a) On modélise la situation par un graphe dont les sommets sont les pays, et il y a une arête entre deux pays s'ils ont une frontière commune. On obtient le graphe G_5 ci-dessous. Les questions se traduisent par : existe-t-il un chemin eulérien dans G_5 ? De quel sommet ce chemin peut-il partir ? ce chemin peut-il être fermé (autrement dit, est-ce un cycle eulérien) ?
On constate que G_5 contient uniquement 2 sommets de degré impair : B et D. De plus, l'algorithme de distance en partant de D donne les étiquettes suivantes :
D (0), C (1), E (1), H (1), I (1), J (1), K (1), A (2), B (2), G (2), L (2), F (3).
Tous les sommets ont une étiquette, donc G_5 est connexe.
Par le théorème d'Euler, G_5 a un chemin eulérien d'extrémités B et D, et pas de cycle eulérien.
Conclusion : on peut franchir chaque frontière une fois et une seule, en partant de B ou de D. On ne peut pas revenir au point de départ.

G_5 :



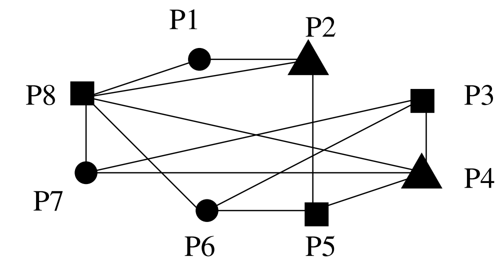
b) On modélise la situation par le même graphe qu'en a). La question devient : quel est le nombre chromatique de G_5 ? Les sommets A, B, C, G forment un sous-graphe complet à 4 sommets, donc $\gamma(G_5) \geq 4$. De plus, le coloriage à 4 couleurs ci-dessus montre que $\gamma(G_5) \leq 4$. On en déduit que $\Gamma(G_5) = 4$. Conclusion : il faut utiliser au minimum 4 couleurs pour colorier la carte. On peut la colorier ainsi :

– couleur 1 (rond noir) : C, F, I, L,
– couleur 2 (carré noir) : B, H, J, E
– couleur 3 (triangle noir) : A, D,
– couleur 4 (carré blanc) : G, K

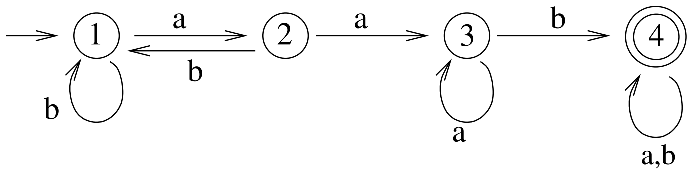
Exercice 6. On modélise la situation par un graphe dont les sommets sont les 8 produits chimiques et il y a une arête entre deux produits s'ils sont incompatibles. La question devient : quel est le nombre minimal de couleurs permettant de colorier ce graphe (chaque couleur correspond à un wagon) ? On obtient le graphe G_6 ci-dessous.
Le coloriage à 3 couleurs ci-dessous montre que $\gamma(G_6) \leq 3$. De plus, les sommets P1, P2, P8 forment un sous-graphe complet à 3 sommets, donc $\gamma(G_6) \geq 3$. On en déduit que $\gamma(G_6) = 3$. Conclusion : il faut au minimum 3 wagons pour transporter les produits chimiques. Une répartition possible est :

– wagon 1 (carré) : P3, P5, P8,
– wagon 2 (rond) : P1, P6, P7,
– wagon 3 (triangle) : P2, P4.

G_6 :



Exercice 7.
a) Voici un automate reconnaissant les mots contenant "aab", et uniquement ces mots-là.



b) Les mots "ab" et "aaabb" ne sont pas reconnus par cet automate. Les mots "abaa" et "bbbaa" sont reconnus par cet automate.