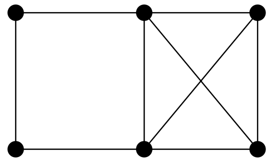
Corrigé de l'interrogation de théorie des graphes

Exercice 1. S'il existe un graphe à 8 sommets dont la liste des degrés est 1, 2, 2, 2, 3, 3, 4, 4, alors la somme des degrés vaut $1+2+2+2+3+3+4+4=21$. C'est un nombre impair, or la somme des degrés est toujours paire par le théorème des poignées de mains. Donc un tel graphe n'existe pas.

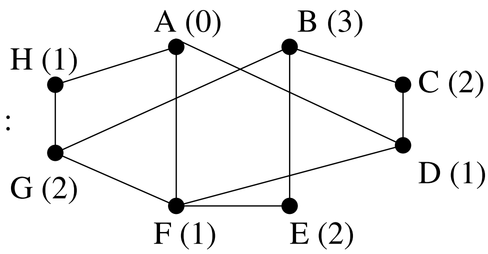
Exercice 2. Il existe un graphe simple à 6 sommets dont la liste des degrés est 2, 2, 3, 3, 4, 4, en voici un (ci-contre) :



Exercice 3. La liste des degrés des sommets de G_3 est : 3, 3, 3, 3, 4, 4, 4, 4. Dans G'_3, tous les sommets sont de degré 3. Conclusion : les graphes G_3 et G'_3 ne sont pas isomorphes.

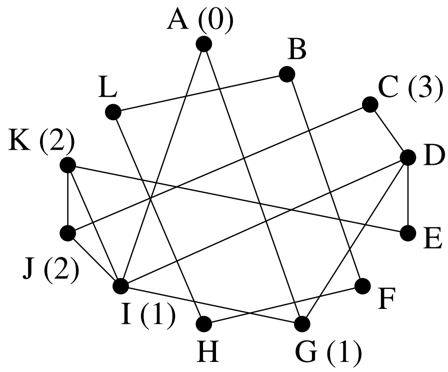
Exercice 4. On applique l'algorithme de distance dans G_4 en partant de A, on trouve le résultat ci-contre. On en déduit que la distance entre A et B est 3, donc il faut prendre au minimum 3 bus pour aller de A à B. Grâce au résultat de l'algorithme de distance, on trouve tous les itinéraires possibles pour aller de A à B avec 3 bus ; il y en a 4 : ADCB, AFEB, AFGB et AHGB.

G_4 :



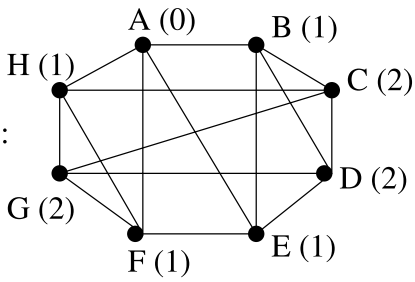
Exercice 5. On applique l'algorithme de distance dans G_5 en partant du sommet A, on trouve le résultat ci-contre. Comme certains sommets n'ont pas d'étiquette (par exemple B), on en déduit que le graphe G_5 n'est pas connexe.

G_5 :



Exercice 6. Dans le graphe G_6, tous les sommets sont de degré 4 (qui est pair). De plus, G_6 est connexe, comme le montre l'algorithme de distance appliqué à G_6 en partant du sommet A (ci-contre). Par conséquent, le théorème d'Euler implique que G_6 a un chemin eulérien.

G_6 :



Exercice 7. Le graphe G_7 a 8 sommets, qui sont tous de degré supérieur ou égal à 4=8/2 ($d(A)=d(G)=5$, $d(B)=d(C)=d(D)=d(E)=d(F)=d(H)=4$). Par conséquent, le théorème de Dirac implique que G_7 a un cycle hamiltonien.

Exercice 8. On représente le problème par un graphe dont les sommets sont les pays et il y a une arête entre deux pays s'ils ont une frontière commune. On obtient le graphe ci-contre. La question se traduit par : existe-t-il un chemin eulérien d'extrémités A et H dans ce graphe ? Par le théorème d'Euler, si un tel chemin existe, les degrés de A et de H doivent être impairs. Or $d(A)=4$. Donc un tel chemin n'existe pas. Conclusion : le voleur ne peut pas réaliser son projet.