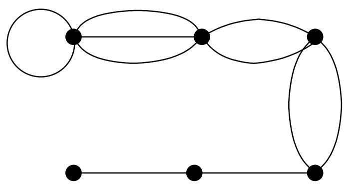
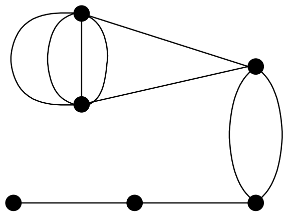
Corrigé du devoir n° 2

Exercice 1.
a) Un graphe à 6 sommets de degrés 1, 2, 3, 4, 5, 5 existe, voici deux exemples (le premier avec une boucle, le second sans boucle) :





Remarque : ce ne peut pas être un graphe simple en raison de la question b), un tel graphe a donc nécessairement des arêtes multiples ou des boucles.

b) Supposons que G soit un graphe simple à 6 sommets A, B, C, D, E, F de degrés respectifs 1, 2, 3, 4, 5, 5. Le sommet E est de degré 5 donc, comme G est un graphe simple, E est nécessairement voisin des 5 autres sommets A, B, C, D, F. De même, F est voisin de A, B, C, D, E. Par conséquent, A est voisin de E et F. Mais ceci contredit le fait que A est de degré 1. Conclusion : un tel graphe n'existe pas.

Exercice 2. On peut représenter le tournoi par un graphe dont les sommets représentent les équipes et les arêtes les parties jouées.

a) On peut reformuler la question comme suit dans le langage de la théorie des graphes :

existe-t-il un graphe à 7 sommets dont tous les sommets sont de degré 5 ?

Si S est l'ensemble des sommets du graphe, on a alors

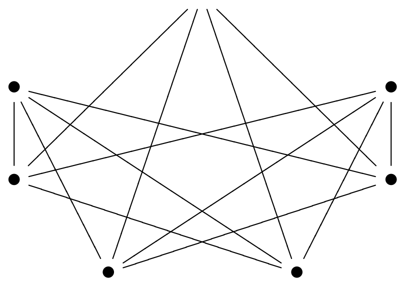
$$\sum_{s \in S} d(s) = 7 \times 5 = 35,$$

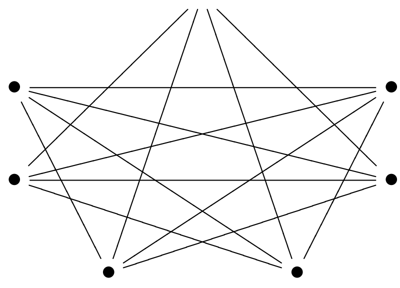
ce qui contredit le théorème des poignées de mains. Un tel graphe n'existe donc pas. Il est impossible de faire jouer 5 parties à chaque équipe.

b) On peut reformuler la question comme suit dans le langage de la théorie des graphes :

existe-t-il un graphe à 7 sommets dont tous les sommets sont de degré 4 ?

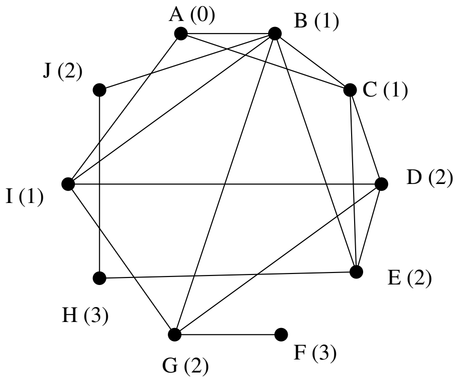
Notons que $\sum_{s \in S} d(s) = 7 \times 4 = 28$ (où S est l'ensemble des sommets), donc ceci ne contredit pas le théorème des poignées de mains (mais ce théorème ne garantit pas l'existence d'un graphe). Voici deux tels graphes qui conviennent. Il est donc possible de faire jouer 4 parties à chaque équipe.





Exercice 3.

a) On représente la situation par un graphe dont les sommets sont les 10 villes, et il y a une arête entre deux villes s'il à a des trains entre elles. On peut aller de n'importe quelle ville à n'importe quelle autre ville en train si le graphe est connexe. Appliquons l'algorithme de distance en partant du sommet A. On obtient les étiquettes ci-dessous. On en déduit que le graphe est connexe, donc on peut aller de n'importe quelle ville à n'importe quelle autre ville en train.



b) Le nombre minimum de trains qu'il faut prendre pour aller de A à F est la distance entre A et F dans le graphe. L'algorithme de distance en partant de A (ci-dessus) montre que cette distance est 3. Il faut donc prendre au minimum 3 trains, autrement dit il faut changer au moins 2 fois de train. Les deux itinéraires possibles sont : $ABGF$ et $AIGF$.

c) La question revient à savoir s'il existe un chemin eulérien d'extrémités A et F dans le graphe ci-dessus. Le graphe est connexe par la question a). Les degrés des extrémités sont impairs ($d(A) = 3$, $d(F) = 1$) et les degrés des autres sommets sont pairs ($d(B) = 6$, $d(C) = d(D) = d(E) = d(G) = d(I) = 4$, $d(H) = d(J) = 2$). Donc, par le théorème d'Euler, il existe un chemin eulérien d'extrémités A et F. Conclusion : il est possible de faire un voyage partant de A, arrivant en F et empruntant une fois et une seule chaque train.

d) Les gares B et I étant fermées, on supprime toutes les arêtes ayant B ou I comme extrémité. On obtient un nouveau graphe, dessiné ci-dessous. L'algorithme de distance partant de A dans ce graphe montre que F est dans la composante connexe de A. Donc il est encore possible d'aller en train de A à F. Dans ce graphe, la distance entre A et F est égale à 4, donc il faut prendre au minimum 4 trains, autrement dit il faut changer de trains 3 fois au minimum.