Feuille d'exercices n^{o} 2

Loi d'une variable aléatoire discrète

Exercice 1. On lance deux dés à 6 faces (non pipés). Déterminer la loi de la variable aléatoire donnant le maximum des deux chiffres obtenus.

Exercice 2. Soit n un entier strictement positif. Quelle est la loi du nombre de garçons dans une famille de n enfants ? (Préciser les hypothèses que vous avez faites)

Exercice 3. Une usine fabrique des transistors. Chaque transistor a une probabilité de 3% d'être défectueux. Quelle est la loi du nombre de transistors défectueux dans un lot de 100 transistors ? Que vaut son espérance et que représente-t-elle ?

Exercice 4. L'entreprise Luminex fabrique des lampes, dont 80% durent plus de 3000 heures. Des tests sont effectués sur des échantillons de taille $n = 15$.
a) Quelle est le nombre moyen de lampes qui ont une durée de vie inférieure à 3000 heures dans un échantillon de taille 15 ?
b) Quelle est la probabilité que toutes les lampes de l'échantillon durent plus de 3000 heures ?
c) Quelle est la probabilité que 13 lampes ou plus, dans un échantillon de taille 15, durent plus de 3000 heures ?

Exercice 5. Un standard téléphonique reçoit en moyenne 2 appels par minute. Les appels sont répartis au hasard dans le temps.
a) Quel type de loi est adapté pour modéliser le nombre d'appels pendant un temps donné ?
b) Quelle est la loi de probabilité régissant le nombre d'appels reçus en 3 minutes ? Quelle est la probabilité qu'il n'y ait aucun appel en 3 minutes ?
c) Quelle est la probabilité que le nombre d'appels en 2 minutes soit supérieur ou égal à 5 ?

Exercice 6. Soit X une variable aléatoire suivant une loi géométrique de paramètre p.
a) Rappeler ce que modélise une loi géométrique.
b) Montrer que, pour tout entier $n \geq 0$, $P(X > n) = (1 - p)^n$.
c) Montrer que, pour tous entiers $n, m \geq 0$, $P(X > n + m \mid X > n) = P(X > m)$.
Remarque : en raison de cette propriété, on dit que la loi géométrique est sans mémoire (en tant que v.a. à valeurs dans $\mathbb{N}$).

Exercices supplémentaires

Exercice 7. Le tableau ci-dessous donne la loi d'un couple de variables aléatoires $Z = (X, Y)$, avec X prenant ses valeurs dans $\{-1, 1\}$ et Y prenant ses valeurs dans $\{-1, 0, 1\}$.

	$Y = -1$	$Y = 0$	$Y = 1$
$X = -1$	1/12	1/3	1/12
$X = 1$	1/6	1/6	1/6

a) Déterminer la probabilité que X et Y soient égales.
b) Déterminer les lois de X et de Y.
c) Déterminer les lois de $X + Y$ et de XY.

Exercice 8. Un candidat se présente à un concours où 20 questions sont données sous forme de QCM. A chaque question, sont proposées 4 réponses, une seule étant exacte. L'examinateur fait le compte des réponses exactes données par les candidats. Certains candidats répondent au hasard à chaque question ; pour ceux-là, définir une variable aléatoire donnant le nombre de réponses exactes et donner sa loi de probabilité ainsi que son espérance.

Exercice 9. Un transporteur aérien a observé que 25% en moyenne des personnes ayant réservé un siège pour un vol ne se présentent pas au départ. Il décide d'accepter jusqu'à 23 réservations alors qu'il ne dispose que de 20 sièges pour ce vol.
a) Soit X la variable aléatoire ≪ nombre de clients qui viennent après réservation quand 23 places ont été réservées ≫. Quelle est la loi de X (précisez les hypothèses que vous faites pour modéliser la situation) ? Quelle est son espérance ?
b) Si 23 personnes ont réservé, quelle est la probabilité que toutes les personnes qui se présentent au départ aient un siège ?

Exercice 10. On lance 10 fois une pièce supposée bien équilibrée. On désigne par X la fréquence du nombre de fois où ≪ pile ≫ a été obtenu (c'est-à-dire le nombre de ≪ pile ≫ divisé par 10).

a) Quelle est la loi de X ? que vaut $E(X)$?

b) Que vaut $P(0.4 \leq X \leq 0.6)$?

c) Déterminer le plus petit entier $a > 0$ telle que la probabilité que X soit dans l'intervalle $\left[0.5 - \frac{a}{10}, 0.5 + \frac{a}{10}\right]$ soit supérieure à 95%, c'est-à-dire $P(0.5 - \frac{a}{10} \leq X \leq 0.5 + \frac{a}{10}) \geq 0,95$.

Exercice 11. Dans une dictature militaire, le dictateur veut augmenter le nombre de naissances de garçons. Il impose la règle suivante : si une femme donne naissance à une fille, elle doit continuer à faire des enfants ; si elle donne naissance à un garçon, elle doit arrêter d'avoir des enfants. On suppose que chaque femme a au moins un enfant et pas plus de 5 enfants.
a) Soit X le nombre de filles par femme. Quelle est la loi de X ?
b) Quel est le nombre moyen de filles d'une femme ? Le nombre moyen de garçons ? Cette règle est-elle efficace pour augmenter le nombre de garçons ?

Exercice 12. La proportion de centenaires en France est de 3 pour 10 000 habitants.
a) Quelle est la loi du nombre de centenaires parmi n personnes ? Si $n \geq 100$, par quelle autre loi peut-on approximer cette loi ?
b) Quelle est la probabilité de trouver au moins un centenaire parmi 500 personnes choisies au hasard ?
c) Quelle est la probabilité de trouver exactement 3 centenaires parmi 10 000 personnes ?

Exercice 13. Charles n'a pas de chat et a au plus un chien. Sophie n'a pas de chien et a au plus un chat. La probabilité pour que Charles ait un chien est de 0.2. Si Charles n'a pas de chien, la probabilité pour que Sophie ait un chat est de 0.1. On note X le nombre de chiens de Charles et Y le nombre de chats de Sophie.

a) Calculer la probabilité pour qu'ils n'aient pas d'animaux.

Soit Z le nombre d'animaux du couple. On suppose que $P(Z = 1) = 0.1$.
b) Calculer la probabilité pour que Z soit égal à 2.
c) Établir la loi de probabilité du couple (X, Y). Quelle est la loi de probabilité de Y ?
d) Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?