Feuille d'exercices n° 3

Variables aléatoires à densité

Exercice 1. Bill va à la cantine entre 12h et 13h30, à une heure aléatoire. On suppose que son heure d'arrivée suit une loi uniforme. Sachant qu'à partir de 13h, il n'y a plus de mousse au chocolat parmi les desserts proposés, quelle est la probabilité pour qu'il y ait de la mousse au chocolat au moment où Bill passe à la cantine ?

Exercice 2. Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$ (c'est-à-dire que la densité de la loi de X est la fonction f telle que $f(x) = \lambda e^{-\lambda x}$ si $x \geq 0$ et $f(x) = 0$ si $x < 0$). Montrer que $P(X > t + s | X > t) = P(X > s)$ pour tous $s, t \geq 0$.
Remarque : en raison de cette propriété, on dit que la loi exponentielle est sans mémoire. Cette loi modélise, entre autres, le temps de désintégration des atomes radioactifs.

Exercice 3. Soit X une variable aléatoire ayant une loi à densité f.
a) On fixe $a \in \mathbb{R}$. Que vaut $P(X = a)$?
b) On suppose que $P(X > 1) = 0.4$. En déduire $P(X \geq 1)$ et $P(X < 1)$.

Exercice 4. Soit $m \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$.
a) Soit X une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$. Que vaut la probabilité $P(X > m)$?
b) Soit Y une variable aléatoire suivant une loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$. Quelle est la loi de $-Y$? quelle est la loi de $\sigma Y + m$?
c) En utilisant la table au verso, déterminer $P(0 \leq Y \leq 0.8)$, $P(-0.6 \leq Y \leq 0)$ et $P(Y \leq 0.8)$.

Exercice 5. Des machines fabriquent des crêpes destinées à être empilées dans des paquets de 10. Chaque crêpe a une épaisseur qui suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ avec $m = 0.6$mm et $\sigma^2 = 0.1$, et on suppose que les épaisseurs des différentes crêpes sont des v.a. indépendantes. Soit X la variable aléatoire « épaisseur du paquet en mm ».
a) Quelle est la loi de X ? quelle est son espérance ?
b) Calculez la probabilité pour que X soit compris entre 6,3 mm et 6,6 mm (*utiliser la table au verso*).

Exercice 6. Une machine est conçue pour confectionner des paquets d'un poids de 500g, mais ils n'ont pas exactement tous le même poids. On a constaté que la distribution des poids autour de la valeur moyenne de 500g avait un écart-type de 25g.
a) Par quelle loi est-il raisonnable de modéliser le poids des paquets ?
b) On fait des lots de 1000 paquets. En moyenne, combien y a-t-il de paquets pesant entre 480g et 520g dans un lot ?
c) Dans un lot de 1000 paquets, combien y a-t-il en moyenne de paquets pesant plus de 450g ?
d) Trouver a tel qu'on ait 90% de chance pour qu'un paquet pris au hasard ait un poids compris entre $500 - a$ et $500 + a$.

Approximation d'une loi binomiale par une loi normale

Exercice 7. Un transporteur aérien a observé que 10% en moyenne des personnes ayant acheté un billet ne se présentent pas au départ. L'avion dispose de 230 place. Le transporteur vend n billets avec $n > 230$. Soit X la variable aléatoire « nombre de personnes, parmi les n, qui se présentent au départ ». On suppose que les voyageurs ont des comportements indépendants.
a) Quelle est la loi exacte de X ? Par quelle loi peut-on l'approximer ?
b) Si $n = 240$, quelle est la probabilité que toutes les personnes qui se présentent au départ aient un siège ?
c) On veut que n soit tel qu'on soit sûr à 95% que tout le monde puisse monter dans l'avion, c'est-à-dire $P(X \leq 230) \geq 0.95$. Quelle inégalité doit vérifier n ? Trouver le nombre n maximal en le cherchant entre 240 et 250.

Exercices supplémentaires

Exercice 8. Soit X une v.a. de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. Calculer $E(X)$.

Exercice 9. On suppose qu'il y a une probabilité égale à $p = 0,1$ d'être contrôlé lorsqu'on prend le tram. Monsieur A fait $n = 700$ voyages par an sur cette ligne.
a) Quelle est la probabilité que Monsieur A soit contrôlé entre 60 et 80 fois dans l'année ?
b) En fait, Monsieur A voyage toujours sans ticket. Sachant que le prix d'un ticket de tram est de 1,12 euros, quelle amende minimale la compagnie doit-elle fixer pour que ce fraudeur ait, sur une période d'une année, une probabilité supérieure à 0.75 d'être perdant ? (donner un montant en euros sans centimes).

Exercice 10. Soient X_1, X_2, X_3, trois variables aléatoires indépendantes, de loi normale, telles que $E(X_1) = 100$, $\mathrm{Var}(X_1) = 100$, $E(X_2) = 20$, $\mathrm{Var}(X_2) = 4$, $E(X_3) = 50$, $\mathrm{Var}(X_3) = 25$. On pose $Y = X_1 + 2X_2 - X_3$. Déterminer $E(Y)$ et $\mathrm{Var}(Y)$. Quelle est la loi de Y ?

Exercice 11. La *fonction de répartition* d'une variable aléatoire X est la fonction $F_X \colon \mathbb{R} \to [0, 1]$ définie par $F_X(t) = P(X \leq t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.
On a la propriété suivante (admise) : la fonction de répartition caractérise la loi d'une variable aléatoire ; autrement dit, si $F_X = F_Y$, alors X et Y ont la même loi.
a) Déterminer la fonction de répartition d'une variable aléatoire X de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$, où $\lambda > 0$. Exprimer $P(X > t)$ à l'aide de $F_X(t)$.
b) Soit X, Y des variables aléatoires indépendantes de même loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$. On pose $Z = \min(X, Y)$. Déterminer $P(Z > t)$ et en déduire la fonction de répartition de Z. Puis en déduire la loi de Z.

Exercice 12. Soit X et Y des v.a. indépendantes de loi uniforme sur $[0, 1]$ et $Z = X + Y$.
a) Si on représente graphiquement (X, Y) par un carré, comment sont représentés les événements $\{Z = t\}$, $\{Z \leq t\}$, $\{Z \in [t, t + dt]\}$?
b) En vous aidant de la représentation graphique, calculer la loi de Z.

Exercice 13. Soit X une v.a. de loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$ avec $\lambda > 0$. Que vaut $E(|X - 1|)$?

Table (partielle) pour une v.a. X de loi normale $\mathcal{N}(0, 1)$

t	$P(0 \leq X \leq t)$	$P(-t \leq X \leq t)$
0.3	0.118	0.236
0.6	0.226	0.451
0.68	**0.25**	**0.5**
0.8	0.288	0.576
1.26	0.396	0.792
1.32	0.407	0.813
1.645	0.45	**0.90**
1.96	0.475	**0.95**
2	0.477	0.954
3	0.499	0.997