Corrigé de l'interrogation n° 1

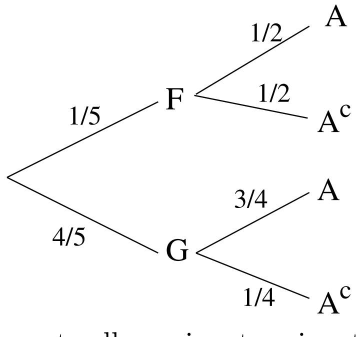
Exercice 1. L'ensemble des résultats possibles est $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Par hypothèse, la probabilité P sur Ω est uniforme ($\forall i \in \Omega$, $P(i) = \frac{1}{6}$ car Ω a 6 éléments).
L'évènement $A = \{1, 2, 3, 4, 5\}$ contient 5 éléments, donc $P(A) = \frac{5}{6}$ ($P(A)$ est la somme des probabilités des évènements élémentaires $i \in A$, donc $P(A) = 5 \times \frac{1}{6}$; une autre façon de le voir est que, comme P est la probabilité uniforme, on a $P(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)} = \frac{5}{6}$).
On a $B = \{2, 4, 6\}$, donc $A \cap B = \{2, 4\}$. D'où $P(A \cap B) = \frac{2}{6} = \frac{1}{3}$ car $A \cap B$ contient 2 éléments.

Exercice 2. Soit A l'évènement "voir une marmotte" et B l'évènement "voir un chamois". Par hypothèse, $P(A) = \frac{2}{3}$ et $P(B) = \frac{1}{4}$. De plus, A et B sont indépendants (par hypothèse), donc $P(A \cap B) = P(A)P(B)$. D'où $P(A \cap B) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{4} = \frac{1}{6}$.
Conclusion : la probabilité de voir une marmotte et un chamois lors d'une randonnée est $\frac{1}{6}$.

L'évènement "ne voir ni marmotte ni chamois" s'écrit $A^c \cap B^c$. On a : $P(A^c) = 1 - P(A) = \frac{1}{3}$ et $P(B^c) = 1 - P(B) = \frac{3}{4}$. De plus, comme A et B sont indépendants, A^c et B^c le sont aussi. Donc $P(A^c \cap B^c) = P(A^c)P(B^c) = \frac{1}{3} \times \frac{3}{4} = \frac{1}{4}$.
Conclusion : la probabilité de ne voir ni marmotte ni chamois lors d'une randonnée est $\frac{1}{4}$.

Exercice 3. Soit Ω l'ensemble des élèves, F le sous-ensemble des filles et G le sous-ensemble des garçons. Soit A l'évènement "avoir un poisson dans le dos". L'énoncé donne les probabilités suivantes : $P(F) = \frac{1}{5}$, $P(G) = \frac{4}{5}$, $P(A|F) = \frac{1}{2}$, $P(A|G) = \frac{3}{4}$.
On veut calculer $P(A)$. Comme F, G forment une partition de Ω, on a :
$P(A) = P(A|F)P(F) + P(A|G)P(G)$ (formule des probabilités totales).
D'où $P(A) = \frac{1}{2} \times \frac{1}{5} + \frac{3}{4} \times \frac{4}{5} = \frac{1}{10} + \frac{3}{5} = \frac{7}{10}$.
Conclusion : la proportion d'élèves avec un poisson dans le dos est $\frac{7}{10}$.

Autre méthode : on peut faire un arbre de probabilité (traduisant les probabilités conditionnelles). On obtient l'arbre suivant :



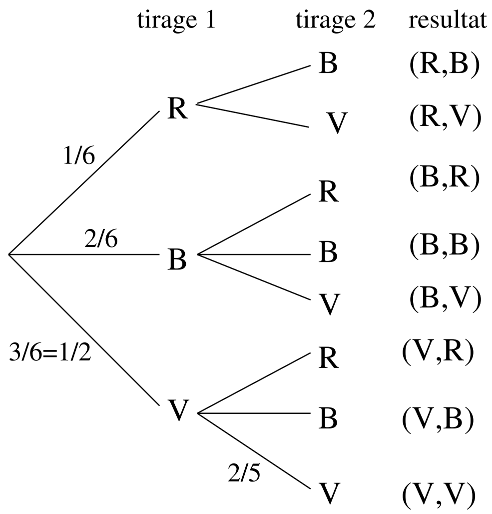
Les branches qui nous intéressent sont celles qui se terminent par A. La branche F—A a pour probabilité $\frac{1}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{1}{10}$ (c'est $P(A \cap F)$). La branche G—A a pour probabilité $\frac{4}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{3}{5}$ (c'est $P(F \cap G)$. Les différentes branches correspondent à des évènements incompatibles (par construction de l'arbre), donc on fait la somme les probabilités des branches se terminant par A. On trouve $P(A) = \frac{1}{10} + \frac{3}{5} = \frac{7}{10}$ (c'est en fait la formule $P(A) = P(A \cap F) + P(A \cap G)$, dû au fait que F, G forment une partition de l'ensemble total). On a évidemment la même conclusion que précédemment.

Exercice 4. Soit Ω l'ensemble des tirages sans remise (non ordonnés) de 2 boules parmi 6.
On a : $\mathrm{Card}(\Omega) = \binom{6}{2}$.
Soit A l'évènement "tirer 2 boules vertes". Comme il y a 3 boules vertes, il faut choisir 2 boules vertes parmi 3, donc $\mathrm{Card}(A) = \binom{3}{2}$.
Tous les tirages sont équiprobables, donc

$$P(A) = \frac{\mathrm{Card}(A)}{\mathrm{Card}(\Omega)} \quad \left(= \frac{\text{nombre de cas favorables}}{\text{nombre de cas possibles}}\right) = \frac{\binom{3}{2}}{\binom{6}{2}} = \frac{3}{15} = \frac{1}{5}.$$

Conclusion : la probabilité de tirer 2 boules vertes est $\frac{1}{5}$.

Autre méthode : on considère 2 tirages sans remise, **ordonnés**, et on fait l'arbre de probabilités correspondant aux couleurs des boules (dans l'arbre ci-dessous, R, B, V représentent les couleurs rouge, bleu, vert). Voici l'arbre entier, mais seulement une partie des probabilités associées (on n'a pas besoin de toutes).



Une seule branche nous intéresse : la dernière, qui donne (V,V). L'arbre donne que la probabilité d'aboutir à (V,V) est $\frac{1}{2} \times \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$. On a évidemment la même conclusion que par la première méthode.

Remarque : si on avait cherché, par exemple, la probabilité d'avoir une rouge et une verte, indépendemment de l'ordre, on aurait considéré les 2 branches donnant (R,V) et (V,R) ; comme on veut 2 boules de même couleur, il y a une seule branche et l'ordre de tirage semble ne pas intervenir (mais un arbre de probabilité de ce type correspond toujours à des résultats ordonnés).