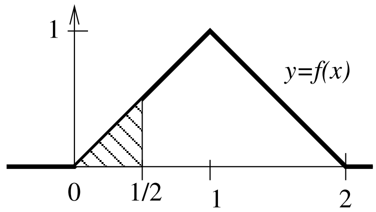
Corrigé de l'interrogation n° 2

Exercice 1. Si le dé donne le résulat x, alors X vaut $x-3$ (résultat du dé moins les 3 euros payés pour jouer). On peut même définir explicitement $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}$, $P(\omega) = \frac{1}{6}$ et $X(\omega) = \omega - 3$ pour tout $\omega \in \Omega$. La variable aléatoire X prend donc ses valeurs dans $E = \{-2,-1,0,1,2,3\}$ et, comme le dé est équilibré, la probabilité d'obtenir chacune des faces est $\frac{1}{6}$, donc la loi de X est donnée par : $P(X = i) = \frac{1}{6}$ pour tout $i \in E$ (on peut aussi présenter la loi sous forme de tableau).
Par définition, $E(X) = \sum_{i \in E} i \cdot P(X = i) = \frac{1}{6}(-2-1+0+1+2+3) = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$.

Exercice 2. Il est ici plus simple de calculer $P(X < \frac{1}{2})$ (probabilité de l'évènement complémentaire).
Par définition, $P\left(X < \frac{1}{2}\right) = \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}} f(x)\,dx = \int_0^{\frac{1}{2}} x\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_0^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{8}$.

On peut aussi remarquer que cette intégrale est l'aire du triangle hachuré, dont l'aire vaut
$\frac{base \times hauteur}{2} = \frac{\frac{1}{2} \times \frac{1}{2}}{2} = \frac{1}{8}$.



On en déduit que
$P(X \geq \frac{1}{2}) = 1 - P(X < \frac{1}{2}) = 1 - \frac{1}{8} = \frac{7}{8}$.
Autre méthode : on peut calculer directement

$$P\left(X \geq \frac{1}{2}\right) = \int_{\frac{1}{2}}^{+\infty} f(x)\,dx = \int_{\frac{1}{2}}^{1} x\,dx + \int_1^2 (2-x)\,dx = \left[\frac{x^2}{2}\right]_{\frac{1}{2}}^{1} + \left[2x - \frac{x^2}{2}\right]_1^2 = \frac{7}{8}.$$

Exercice 3.
a) Soit $X_1, X_2, \ldots, X_5$ les variables aléatoires correspondant aux 5 digits, avec $X_i = 1$ si le digit n° i est mal transmis et $X_i = 0$ sinon (pour $i = 1,2,3,4,5$). Chaque X_i suit une loi de Bernoulli de paramètre $p = 0,1$, et $X_1, \ldots, X_5$ sont indépendants par hypothèse. Alors X peut être écrit $X = X_1 + X_2 + \ldots + X_5$, donc X suit une loi binomiale $B(5,p)$ avec $p = 0,1$.
b) Puisque X compte le nombre d'erreurs lors de la transmission de 5 digits, la probabilité à calculer est $P(X \geq 3)$. Comme X suit une loi binomiale, on a :

$$P(X \geq 3) = P(X=3) + P(X=4) + P(X=5) = \binom{3}{5} p^3(1-p)^2 + \binom{4}{5} p^4(1-p) + \binom{5}{5} p^5 = 0,00856.$$

Exercice 4. On rappelle qu'une loi normale $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ a pour espérance m et pour variance σ^2.
a) X suit la loi $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$ donc $\frac{X-m}{\sigma} = \frac{X-0,3}{0,1}$ suit la loi normale standard $\mathcal{N}(0,1)$. On a :

$$X \leq 0,36 \iff X - 0,3 \leq 0,06 \iff \frac{X-0,3}{0,1} \leq 0,6$$

donc $P(X \leq 0,36) = P(\frac{X-0,3}{0,1} \leq 0,6) = P(N \leq 0,6)$.
De plus, $P(N \leq 0,6) = P(N < 0) + P(0 \leq N \leq 0,6)$. Par symétrie de la loi normale, $P(N < 0) = 0,5$; et l'énoncé donne $P(0 \leq N \leq 0,6) \simeq 0,226$. D'où
$P(X \leq 0,36) \simeq 0,5 + 0,226 = 0,726$.
b) La variable aléatoire Z s'écrit $Z = X_1 + X_2 + \cdots + X_n$ (somme des épaisseurs des n plaques). On a :
- $E(Z) = E(X_1) + E(X_2) + \cdots + E(X_n) = n \cdot m = 0,3n$,
- par indépendance des $X_1, \ldots, X_n$, $\mathrm{Var}(Z) = \mathrm{Var}(X_1) + \cdots + \mathrm{Var}(X_n) = n \cdot \sigma^2 = 0,01n$.

Selon une propriété du cours, la somme de variables aléatoires indépendantes suivant des lois normales est une variable aléatoire de loi normale. Donc Z suit une loi normale. Comme $E(Z) = nm$ et $\mathrm{Var}(Z) = n\sigma^2$, Z suit la loi $\mathcal{N}(nm, n\sigma^2)$.