Examen du 16 juin 2015 – durée 2 heures

Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.

Ne donnez pas uniquement les résultats sans explication !

On a le droit de donner un résultat sous forme de formule (par exemple $C_{17}^{7}\ \frac{1}{2^7}$).

Exercice 1. On considère des ampoules ayant une durée de vie (exprimée en heures) qui suit une loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ avec $m = 2000$ et $\sigma = 1000$.
a) Quelle est la probabilité pour qu'une ampoule ait une durée de vie inférieure ou égale à 2000 heures ?
b) Quelle est la probabilité pour qu'une ampoule ait une durée de vie inférieure ou égale à 2800 heures ?
c) Une pièce est éclairée par 3 ampoules, qui sont été installées en même temps. On suppose que les durées de vie des différentes ampoules sont indépendantes. Quelle est la probabilité pour que les 3 ampoules ne fonctionnent plus au bout de 2000 heures ?

Exercice 2. On considère 2 urnes A et B. L'urne A contient 3 boules noires et 7 boules blanches. L'urne B contient 14 boules noires et 6 boules blanches. On tire d'abord à pile ou face (avec une pièce ayant la même chance de tomber sur chacune des faces). Si on tombe sur "pile", on prend une boule dans l'urne A. Si on tombe sur "face", on prend une boule dans l'urne B. Pour chaque urne, chacune des boules a la même chance d'être tirée.
a) Quelle est la probabilité d'obtenir une boule noire ?
b) Si on obtient une boule noire, quelle est la probabilité qu'elle vienne de l'urne A ?

Exercice 3. La proportion de personnes porteuses d'un certain virus est de $p = \frac{3}{1000}$. On considère un échantillon de 100 personnes choisies au hasard (on suppose que ces personnes sont indépendantes entre elles). On note Y le nombre de personnes porteuses de virus dans cet échantillon.
a) Quelle est la loi de Y ? que valent $E(Y)$ et $\mathrm{Var}(Y)$?
b) Quelle est la probabilité qu'il n'y ait aucune personne porteuse de virus dans cet échantillon ? Quelle est la probabilité qu'il y ait au moins une personne porteuse de virus dans cet échantillon ? (donner des formules, inutile d'essayer de calculer le résultat numérique)

Exercice 4. On veut évaluer la proportion p (inconnue) de personnes prenant un yaourt à la cantine. On considère 300 personnes venant à la cantine, on constate que 1/4 d'entre elles prennent un yaourt. On suppose que les différentes personnes font des choix indépendamment les unes des autres.
a) Modéliser le problème en termes de variables aléatoires.
b) Déterminer un intervalle de confiance contenant p avec une probabilité de 95%.

Exercice 5. On veut savoir si une pièce est équilibrée. Soit p la probabilité (inconnue) que la pièce tombe sur "pile". On lance la pièce 2500 fois, elle tombe sur "pile" dans 55% des cas. On fait deux hypothèses :
– H_0 : la pièce est équilibrée, c'est-à-dire $p = \frac{1}{2}$,
– H_1 : la pièce n'est pas équilibrée, c'est-à-dire $p \neq \frac{1}{2}$,
Faites un test de l'hypothèse H_0 contre l'hypothèse H_1, au seuil de 5% (c'est-à-dire avec une probabilité ≤ 0.05 de rejeter H_0 à tort). En déduire si, avec ce seuil, on peut conclure que la pièce est équilibrée.

Exercice 6. 10 chevaux, numérotés de 1 à 10, participent à une course. Avant la course, on parie sur les numéros de 3 chevaux. On suppose que, avant le départ, les chevaux ont tous les mêmes chances.
a) Quelle est la probabilité d'avoir, dans l'ordre, les numéros des 3 chevaux qui arriveront 1er, 2ème et 3ème ?
b) Quelle est la probabilité d'avoir les numéros des 3 chevaux qui arriveront 1er, 2ème et 3ème, mais pas nécessairement dans l'ordre ?

Table (partielle) pour une v.a. N de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$:

t	$P(0 \leq N \leq t)$	$P(-t \leq N \leq t)$
0.8	0.3	0.6
1.3	0.4	0.8
1.6	0.45	0.9
2	0.475	0.95

Barème : 3 – 3 – 4 – 4 – 4 – 3