S2 PeiP — ORSAY 2013-2014
MATHÉMATIQUES

# Contrôle n°4 du 16 mai 2014

DURÉE 1 HEURE 30

*La qualité de la rédaction interviendra dans l'appréciation de la copie.* ***Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.***

**Exercice 1 -** Donner dans chaque cas suivant un exemple de matrice $A$ de taille $2 \times 2$ telle que :

**1.** $\operatorname{Im} A$ est la droite engendrée par $\overrightarrow{u_1} = (1, 2)$,

**2.** $\ker A$ est la droite engendrée par $\overrightarrow{u_2} = (1, 1)$,

**3.** $A^2 = I_2$ avec $A \neq I_2$ et $A \neq -I_2$ (on rappelle que $I_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$),

**4.** $A^2 = A$ avec $A \neq 0$ et $A \neq I_2$.

**Exercice 2 -** On note $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

**1.** Montrer que la matrice $A$ est inversible et calculer son inverse.

**2.** Soient $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$ les trois vecteurs colonnes de $A$. Montrer que la famille $B' = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Que vaut la matrice de passage $P$ de $B$ à $B'$ ? Et celle $P'$ de $B'$ à $B$ ?

**3.** Donner les coordonnées $x'$, $y'$ et $z'$ de $\overrightarrow{u} = (x, y, z)$ dans la base $B'$.

**4.** Soit $E$ le plan d'équation $x + y + z = 0$ dans $B$. Donner son équation dans la base $B'$.

**Exercice 3 -** Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire associée à la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ dans la base canonique $B = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$.

**1.** Déterminer la rang et l'image de $A$. La matrice $A$ est-elle inversible ?

**2.** Déterminer la dimension et une base du noyau de $A$. Les espaces $\ker A$ et $\operatorname{Im} A$ sont-ils supplémentaires ?

**3.** En déduire qu'il existe une base $B' = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle on a

$$\operatorname{Mat}_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

**Exercice 4 -** *Exercice de modélisation.* Chaque année, une société de pêche lâche 100 jeunes poissons dans un lac. D'une année à l'autre :

- 80% des jeunes poissons (J) meurent, et 20% deviennent adultes ;
- un poisson adulte (A) se reproduit en donnant naissance en moyenne à 2 jeunes poissons, puis 50% des poissons adultes meurent ou sont péchés.

**1.** L'année $n$, on note $X(n) = (J(n), A(n))$ la population de poissons. Montrer que, écrit en colonne, $X(n)$ satisfait une relation de recurrence du type $X(n+1) = MX(n) + E$ avec $M$ une matrice fixe et $E$ un vecteur fixe.

**2.** Montrer qu'il existe une population stationnaire et la calculer.