S2 PeiP — Orsay 2013-2014
Mathématiques

Corrigé du contrôle n°4 du 16 mai 2014

Exercice 1 -

1. On a toujours que $\operatorname{Im} A$ est engendrée par les deux colonnes $C_1 = Ae_1$ et $C_2 = Ae_2$ de A. Par exemple, $\operatorname{Im} A$ est engendré par $\overrightarrow{u_1} = (1,2)$ si $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$.

2. $\overrightarrow{u_2} = (1,1) \in \ker A \Leftrightarrow A \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = C_1 + C_2 = 0$. Par exemple, le noyau de $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ est la droite engendrée par $(1,1)$.

3. $A^2 = I_2$ pour une symétrie suivant une droite, comme par exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$

4. $A^2 = A$ pour une projection sur une droite, comme par exemple $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 -

1. Soit $Y = (y_1, y_2, y_3)$ donné et $X = (x_1, x_2, x_3)$ inconnu. On étudie le système

$$AX = Y \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 - x_3 = y_1 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 = y_2 \\ -x_1 - x_2 - x_3 = y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x_2} - x_3 = y_1 \\ x_1 + 3x_3 = y_2 - 2y_1 \\ -x_1 - 2x_3 = y_1 + y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x_2} - x_3 = y_1 \\ \boxed{x_1} + 3x_3 = -2y_1 + y_2 \\ \boxed{x_3} = -y_1 + y_2 + y_3 \end{cases}$$

A est inversible car le système a une unique solution :

$$\begin{cases} x_1 = y_1 - 2y_2 - 3y_3 \\ x_2 = y_2 + y_3 \\ x_3 = -y_1 + y_2 + y_3 \end{cases} \Leftrightarrow X = A^{-1}Y \quad \text{avec} \quad A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

2. La famille B' des trois vecteurs colonnes de A est une base de $\mathbb{R}^3$ ssi son rang est 3, c'est-à-dire ssi $\operatorname{rang} A = 3$, ce qui est le cas car elle est inversible.

De plus, par définition, $A = P$ est la matrice de passage de B à B'. D'après le cours, la matrice de passage de B' à B est $P' = P^{-1} = A^{-1}$.

3. Si $\overrightarrow{u}$ a pour coordonnées $X = (x, y, z)$ dans la base B, alors dans la base B' ses coordonnées $X' = (x', y', z')$ satisfont (en colonnes)

$$X = PX' \Leftrightarrow X' = P^{-1}X = A^{-1}X \Leftrightarrow \begin{cases} x' = x - 2y - 3z \\ y' = y + z \\ z' = -x + y + z \end{cases}$$

4. On a $X = PX' = AX' \Leftrightarrow \begin{cases} x = y' - z' \\ y = x' + 2y' + z' \\ z = -x' - y' - z' \end{cases}$.

En particulier $\overrightarrow{u} = (x, y, z) \in E$ plan d'équation $x + y + z = 0 \Leftrightarrow 2y' - z' = 0$. C'est l'équation de E exprimée avec les coordonnées dans B'.

Exercice 3 -

1. L'image de A est l'espace engendré par les colonnes de A. Ici, $\operatorname{Im} A$ est clairement la droite engendrée par $\overrightarrow{v_3} = (1, 1, 1)$. On a $\operatorname{rang} A = \dim \operatorname{Im} A = 1$.

La matrice 3×3 A n'est pas inversible car A n'est pas de rang 3.

2. On a $\overrightarrow{u} = (x, y, z) \in \ker A \Leftrightarrow x + y + z = 0$. Le noyau de A est donc ce plan. Un base en est (par exemple) $\overrightarrow{v_1} = (-1, 1, 0)$ et $\overrightarrow{v_2} = (-1, 0, 1)$.

On a $\dim \ker A + \dim \operatorname{Im} A = 3$ (toujours vrai par le théorème du rang). De plus, ici $\operatorname{Im} A \cap \ker A = \{\overrightarrow{0}\}$ car $\overrightarrow{v_3} = (1, 1, 1)$, qui engendre $\operatorname{Im} A$, n'appartient pas $\ker A$ d'équation $x + y + z = 0$. On a donc que $\ker A$ et $\operatorname{Im} A$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$.

3. On prend $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ base de $\ker A$, que l'on complète avec $\overrightarrow{v_3} = (1, 1, 1)$ base de $\operatorname{Im} A$. Comme $\overrightarrow{v_3} \notin \ker A$, la famille $B' = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$. On a par construction

$$f(\overrightarrow{v_1}) = \overrightarrow{0} = f(\overrightarrow{v_2}) \text{ et } f(\overrightarrow{v_3}) = \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 3 \end{pmatrix} = 3\overrightarrow{v_3} \Leftrightarrow \operatorname{Mat}_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

Exercice 4 -

1. On a par d'après les hypothèses $\begin{cases} J(n+1) = 2A(n) + 100 \\ A(n+1) = 0,2J(n) + 0,5A(n) \end{cases}$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow X(n+1) = \begin{pmatrix} J(n+1) \\ A(n+1) \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0,2 & 0,5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J(n) \\ A(n) \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix} \\ &= MX(n) + E \text{ avec } M = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0,2 & 0,5 \end{pmatrix} \text{ et } E = \begin{pmatrix} 100 \\ 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

2. La population est stationnaire si $X(n+1) = X(n) = X$ est constant. Ceci équivaut à

$$X = MX + E \Leftrightarrow (I_2 - M)X = E \text{ avec } I_2 - M = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -0,2 & 0,5 \end{pmatrix}.$$

Comme $\det(I_2 - M) = 0,5 - 2 \times 0,2 = 0,1 \neq 0$, la matrice $I_2 - M$ est inversible, d'inverse

$$(I_2 - M)^{-1} = \frac{1}{\det(I_2 - M)} \begin{pmatrix} 0,5 & 2 \\ 0,2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 20 \\ 2 & 10 \end{pmatrix}.$$

On a alors

$$X = \begin{pmatrix} J \\ A \end{pmatrix} = (I_2 - M)^{-1}E = \begin{pmatrix} 500 \\ 200 \end{pmatrix}.$$