S2 PeiP | Orsay 2014-2015

Mathématiques

Contrôle n°2 du 17 mars 2015

Durée 1 heure 30 min

La qualité de la rédaction interviendra dans l'appréciation de la copie. ***Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.***

Exercice 1 - Pour a réel donné, on considère les vecteurs de $\mathbb{R}^3$,

$$\overrightarrow{v_1} = (1,0,a)\ ,\ \overrightarrow{v_2} = (2,a,a) \text{ et } \overrightarrow{v_3} = (a,a,0).$$

1. Pour quelles valeurs de a, la famille $\mathcal{F} = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$ est-elle libre ?

2. Déterminer la dimension et une base de $E = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ suivant les valeurs de a.

3. Pour quelles valeurs de a a-t-on $\overrightarrow{v} = (0,1,-1) \in E$?

Exercice 2 - Trouver une base $B = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle les coordonnées de

$$\overrightarrow{e_1} = (1,0) \text{ soient } (1,1), \text{ et celles de } \overrightarrow{e_2} = (0,1) \text{ soient } (1,-1).$$

Exercice 3 - Dans $\mathbb{R}^3$, on considère les vecteurs $\overrightarrow{v_1} = (1,1,-2)$ et $\overrightarrow{v_2} = (2,-1,2)$.

1. Déterminer une équation cartésienne du plan $P = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$.

2. Compléter la famille $(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ en une base $B = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$ de $\mathbb{R}^3$.

3. Donner les coordonnées de $\overrightarrow{v} = (1,-2,4)$ dans cette base.

Exercice 4 - Dans $\mathbb{R}^4$, on considère le sous-espace vectoriel

$$E = \{\overrightarrow{v} = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+y+z+t = 0 = x+2y+3z+4t\}.$$

1. Déterminer la dimension et une base de E.

2. Le plan P engendré par $\overrightarrow{e_1} = (1,0,0,0)$ et $\overrightarrow{e_2} = (0,1,0,0)$ est-il un supplémentaire de E dans $\mathbb{R}^4$? (Justifier votre réponse !)

Exercice 5 - On considère l'unique application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ telle que

$$f(1,0,0) = (0,1,-1)\ ,\ f(0,1,0) = (-1,2,-1) \text{ et } f(0,0,1) = (-1,1,0).$$

1. Donner la matrice A de f dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et calculer $f(x,y,z)$.

2. Montrer que $f(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v}$ lorsque $\overrightarrow{v} = (x,y,z)$ appartient au plan P d'équation $x+y+z = 0$.

3. Déterminer l'image par f de la droite affine $D_{\overrightarrow{v_0}}$ passant par $\overrightarrow{v_0} \in P$ et de direction $\overrightarrow{u} = (1,-1,1)$.

4. Que représente géométriquement l'application f ?