S2 PeiP — Orsay 2014-2015
Mathématiques

Contrôle n°3 du 31 mars 2015

Durée 1 heure 30

La qualité de la rédaction interviendra dans l'appréciation de la copie. ***Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.***

Exercice 1 - Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire $X \mapsto AX$ associée à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Donner le rang de f et une base de $\operatorname{Im} f$. L'application f est-elle surjective ?

2. Quelle est la dimension de $\ker f$? En donner une base si $\ker f$ n'est pas nul. L'application f est-elle injective ?

3. Donner une équation cartésienne de $\operatorname{Im} f$.

4. Résoudre l'équation $f(x, y, z) = (1, 2, a)$ en fonction du paramètre a.

Exercice 2 - 1. Donner un exemple de matrice A de taille 2×2 telle que $\operatorname{Im} A$ soit la droite engendrée par $\overrightarrow{u_1} = (2, 1)$.

2. Donner un exemple de matrice B de taille 2×2 telle que $\ker B = \operatorname{Im} B$ soit la droite engendrée par $\overrightarrow{e_1} = (1, 0)$. Que vaut B^2 ?

3. Donner une base du plan P de $\mathbb{R}^3$ d'équation $x + y + z = 0$. En déduire un exemple de matrice C de taille 3×3 telle que $\operatorname{Im} C = P$. L'application linéaire associée $X \mapsto CX$ est-elle injective ?

Exercice 3 - Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire telle que

$$f(1, 0, 0) = (1, -1, 0)\,,\ f(0, 1, 0) = (0, 1, -1) \text{ et } f(0, 0, 1) = (1, -1, 1).$$

1. Donner la matrice A de f dans la base canonique.

2. A est-elle inversible ? Si oui, calculer son inverse.

Exercice 4 - Soit $\ell : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ l'application linéaire définie par $\ell(x, y, z) = x - y + z$ et $\overrightarrow{u} = (1, 1, 1)$. On note $P = \ker \ell$ et D la droite engendrée par $\overrightarrow{u}$.

1. Montrer que l'application $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ définie par $f(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v} - 2\ell(\overrightarrow{v})\overrightarrow{u}$ est linéaire et donner sa matrice A dans la base canonique.

2. Montrer que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$, et que $f(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v}$ si $\overrightarrow{v} \in P$ et $f(\overrightarrow{v}) = -\overrightarrow{v}$ si $\overrightarrow{v} \in D$.

3. En déduire qu'il existe une base $B' = (\overrightarrow{e_1}', \overrightarrow{e_2}', \overrightarrow{e_3}')$ de $\mathbb{R}^3$ telle que la matrice de f dans la base B' soit

$$A' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

4. Calculer $(A')^2$. Que vaut $f \circ f$? L'application f est-elle inversible ? Si oui, déterminer A^{-1}.