Corrigé du contrôle n°2 du 17 mars 2015

Exercice 1 - 1. On échelonne le système (S) : $x\overrightarrow{v_1}+y\overrightarrow{v_2}+z\overrightarrow{v_3}=\overrightarrow{0} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases}\boxed{x}+2y+az=0\\ \quad ay+az=0\\ \quad ax+ay=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\boxed{x}+2y+az=0\\ \quad ay+az=0\\ -ay-a^2z=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\boxed{x}+2y+az=0\\ \quad ay+az=0\\ a(1-a)z=0 \ \leftarrow L_3+L_2\end{cases}$$

La famille $\mathcal{F}$ est libre si et seulement si le système n'a pas d'inconnue non principale, c'est-à-dire si $a\neq 0$ et $a\neq 1$.

2. La dimension de $E=\mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ est le rang du système (S), c'est-à-dire son nombre d'inconnues principales.

• On a donc $\dim E=3$ si $a\neq 0$ et $a\neq 1$. Dans ce cas $E=\mathbb{R}^3$ a pour base la famille (libre et génératrice) $\mathcal{F}$, ou n'importe quelle base de $\mathbb{R}^3$.

• Si $a=0$, alors x inconnue principale. E est la droite engendrée par $\overrightarrow{v_1}$.

• Si $a=1$, alors x et y inconnues principales et E est le plan engendré par $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$.

3. • Si $a\neq 0$ et $a\neq 1$, alors (tout vecteur) $\overrightarrow{v}$ de $\mathbb{R}^3$ appartient à $E=\mathbb{R}^3$.

• Si $a=0$, alors $\overrightarrow{v}=(0,1,-1)\notin E$ droite engendrée par $\overrightarrow{v_1}=(1,0,0)$.

• Si $a=1$, alors on trouve que $\overrightarrow{v}=-2\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}\in E$.

Exercice 2 - On cherche une base $B=(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2})$ de $\mathbb{R}^2$ telle que

$$\begin{cases}\overrightarrow{e_1}=(1,1)_B=\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}\\ \overrightarrow{e_2}=(1,-1)_B=\overrightarrow{v_1}-\overrightarrow{v_2}\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\overrightarrow{e_1}+\overrightarrow{e_2}=2\overrightarrow{v_1}\\ \overrightarrow{e_1}-\overrightarrow{e_2}=2\overrightarrow{v_2}\end{cases}\Leftrightarrow \overrightarrow{v_1}=(\frac{1}{2},\frac{1}{2}) \text{ et } \overrightarrow{v_2}=(\frac{1}{2},-\frac{1}{2}).$$

Les 2 vecteurs libres obtenus forment bien une base de $\mathbb{R}^2$.

Exercice 3 - 1. Un vecteur $\overrightarrow{v}=(x,y,z)\in P=\mathrm{Vect}(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2})\Leftrightarrow \exists\lambda_1,\lambda_2$ tels que

$$\overrightarrow{v}=\lambda_1\overrightarrow{v_1}+\lambda_2\overrightarrow{v_2}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_1+2\lambda_2=x\\ \lambda_1-\lambda_2=y\\ -2\lambda_1+2\lambda_2=z\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\boxed{\lambda_1}+2\lambda_2=x\\ -3\lambda_2=y-x\\ 6\lambda_2=z+2x\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\boxed{\lambda_1}+2\lambda_2=x\\ \boxed{-3\lambda_2}=y-x\\ 0=z+2y\end{cases}$$

Une équation cartésienne de P est donc $2y+z=0$.

2. Tout vecteur $\overrightarrow{v_3}\notin P$ convient ; car alors $B=(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3})$ est une famille libre de 3 vecteurs de $\mathbb{R}^3$, et donc une base. On peut prendre par exemple $\overrightarrow{v_3}=(0,1,0)$.

3. Le vecteur $\overrightarrow{v}=(1,-2,4)\in P$ car satisfait son équation. On trouve que

$$\lambda_1\overrightarrow{v_1}+\lambda_2\overrightarrow{v_2}=\overrightarrow{v}\Leftrightarrow\begin{cases}\boxed{\lambda_1}+2\lambda_2=1\\ \lambda_1-\lambda_2=-2\\ -2\lambda_1+2\lambda_2=4\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\boxed{\lambda_1}+2\lambda_2=1\\ -3\lambda_2=-3\\ 6\lambda_2=6\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}\lambda_1=-1\\ \lambda_2=1\end{cases}$$

On a donc $\overrightarrow{v} = -\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} = -1.\overrightarrow{v_1} + 1.\overrightarrow{v_2} + 0.\overrightarrow{v_3} = (-1,1,0)_B$.

Exercice 4 - 1. On a $\overrightarrow{v} = (x,y,z,t) \in E \Leftrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{r} \boxed{x}+y+z+t=0 \\ x+2y+3z+4t=0 \end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} \boxed{x}+y+z+t=0 \\ \boxed{y}+2z+3t=0 \end{array}\right.$$

On a deux inconnues **non principales** z et t, et donc E est un plan. Une base est donnée par les solutions correspondant à $(z,t) = (1,0)$ et $(0,1)$:

$$\overrightarrow{v_1} = (1,-2,1,0) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v_2} = (2,-3,0,1).$$

2. Comme $\dim P + \dim E = 2+2 = 4 = \dim \mathbb{R}^4$, on a P et E supplémentaires si et seulement si $P \cap E = \{\overrightarrow{0}\}$. Or $\overrightarrow{v} = (x,y,z,t) \in P \cap E \Leftrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{l} \boxed{x}+y+z+t=0 \\ \quad \boxed{y}+2z+3t=0 \\ \qquad\qquad z=t=0 \text{ (équations de } P) \end{array}\right. \Leftrightarrow \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}.$$

Le plan P est donc un supplémentaire de E dans $\mathbb{R}^4$. On pouvait aussi dire que d'après un résultat de cours, P est un supplémentaire de E car P est engendré par $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$ dont les indices correspondent aux **inconnues principales** (x et y) du système définissant E.

Exercice 5 - 1. Les colonnes de la matrice de f sont les images des vecteurs de la base canonique. On a donc

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

De plus, par linéarité de f (ou calcul matriciel), on a

$$f(x,y,z) = xf(1,0,0) + yf(0,1,0) + zf(0,0,1) = (-y-z, x+2y+z, -x-y).$$

2. Lorsque $\overrightarrow{v} = (x,y,z) \in P$ alors $-y-z = x$, $x+2y+z = y$ et $-x-y = z$, d'où

$$f(\overrightarrow{v}) = f(x,y,z) = (x,y,z) = \overrightarrow{v}.$$

3. On a $\overrightarrow{v} \in D_{\overrightarrow{v_0}} \Leftrightarrow \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_0} + \lambda\overrightarrow{u}$. D'où, par linéarité,

$$f(\overrightarrow{v}) = f(\overrightarrow{v_0}) + \lambda f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v_0}\,,$$

car $f(\overrightarrow{v_0}) = \overrightarrow{v_0}$ d'après 2, et $f(\overrightarrow{u}) = f(1,-1,1) = \overrightarrow{0}$ d'après 1.

L'image par f de toute la droite $D_{\overrightarrow{v_0}}$ est donc le vecteur $\overrightarrow{v_0} \in P$, laissé invariant par f.

4. L'application f a les propriétés caractéristiques de la projection sur P le long de la droite engendrée par $\overrightarrow{u}$.