S2 PeiP — Orsay 2014-2015
Mathématiques

Contrôle de rattrapage du 18 juin 2015

Durée 1 heure 30

La qualité de la rédaction interviendra dans l'appréciation de la copie. ***Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.***

Barème indicatif : $5+5+5+5$.

Exercice 1 -

1. Représenter $D_1 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 \leq x \leq y \leq 2-x\}$ et calculer $I_1 = \iint_{D_1} x\,dxdy$.

2. Représenter $D_2 = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \leq y,\ x^2+y^2 \leq 1\}$ et calculer $I_2 = \iint_{D_2} x(x^2+y^2)\,dxdy$.

3. Représenter $D_3 = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2+y^2 \leq z \leq 1\}$ et calculer son volume.

Exercice 2 - Dans $\mathbb{R}^4$, on considère le sous-espace vectoriel

$$H = \{\overrightarrow{v} = (x,y,z,t) \in \mathbb{R}^4 \mid x+2y+3z+4t=0\}.$$

1. Quelle est la dimension de H ? Donner une base B_H de H.

Pour a paramètre réel, on considère la droite D_a de $\mathbb{R}^4$ engendrée par $\overrightarrow{u_a} = (a,1,0,0)$.

2. Pour quelles valeurs de a les espaces H et D_a sont-ils supplémentaires ?

3. Soit $\overrightarrow{e_1} = (1,0,0,0)$. Pour $a=0$, trouver $\overrightarrow{u} \in D_0$ et $\overrightarrow{v} \in H$ tels que $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$.

Exercice 3 -

On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 5 \\ -2 & 4 & -10 \\ -1 & 2 & -5 \end{pmatrix}$ et l'application linéaire $f : X \mapsto AX$ associée.

1. Déterminer le rang de A et donner une base de $\operatorname{Im} f$. L'application f est-elle surjective ?

2. Déterminer la dimension de $\ker f$ et en donner une base si $\ker f \neq \{\overrightarrow{0}\}$.

3. Les espaces $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ sont-ils supplémentaires ?

4. Soit $\overrightarrow{u} \in \operatorname{Im} f$, montrer que $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{0}$. Que peut-on en déduire pour $f \circ f$?

Exercice 4 - On considère dans $\mathbb{R}^2$ les vecteurs $\overrightarrow{v_1} = (2,-1)$ et $\overrightarrow{v_2} = (-1,1)$.

1. Vérifier que $B' = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{e_1} = (1,0)$ et $\overrightarrow{e_2} = (0,1)$ dans cette base.

Soit f l'unique application linéaire de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ telle que $f(\overrightarrow{v_1}) = \overrightarrow{v_1}$ et $f(\overrightarrow{v_2}) = -\overrightarrow{v_2}$.

2. Donner la matrice M de f dans la base B'. Est-elle inversible ? Calculer M^2.

3. Calculer à l'aide de 1, et de la définition de f, les vecteurs $f(\overrightarrow{e_1})$ et $f(\overrightarrow{e_2})$. En déduire la matrice N de f dans la base canonique $B = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$.

Réponses au verso.

Réponses succintes

Exercice 1 - 1. D_1 est le triangle de sommets $(0,0)$, $(1,1)$ et $(0,2)$. On trouve par Fubini « en piles verticales » $y \in [x, 2-x]$ que $I_1 = \dfrac{1}{3}$.

2. D_2 est le demi-disque de rayon 1 au dessus de la diagonale $y = x$. En passant en coordonnées polaires, on obtient $I_2 = \displaystyle\int_0^1 \int_{\pi/4}^{5\pi/4} (r\cos\theta) r^2 \, r dr d\theta = -\dfrac{\sqrt{2}}{5}$.

3. D_3 est le solide de révolution autour de l'axe $(0z)$ dont la section verticale $y = 0$ est la parabole $x^2 \leq z \leq 1$ (paraboloïde de révolution). Pour z donné dans $[0,1]$, la tranche D_z de D_3 est le disque de rayon $\sqrt{z}$. On a donc $\mathrm{Vol}(D_3) = \displaystyle\int_0^1 \mathrm{Aire}(D_z) dz = \int_0^1 \pi z dz = \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 2 - 1. H est donné par l'équation $\boxed{x} + 2y + 3z + 4t = 0$ à 3 inconnues non-principales. On a donc $\dim H = 3$ et une base est donnée par

$$B_H = ((-2,1,0,0), (-3,0,1,0), (-4,0,0,1)\,.$$

2. Comme $\dim H + \dim D_a = 3 + 1 = 4 = \dim \mathbb{R}^4$, les espaces H et D_a sont supplémentaires ssi $H \cap D_a = \{\overrightarrow{0}\}$. Or $\overrightarrow{u_a} \in H$ ssi $a + 2 = 0$, et donc $H \cap D_a = \{\overrightarrow{0}\} \Leftrightarrow a \neq -2$.

3. On cherche $\overrightarrow{u} \in D_0$ sous la forme $\overrightarrow{u} = \lambda \overrightarrow{u_0}$. On a $\overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{u} = (1, -\lambda, 0, 0) = \overrightarrow{v} \in H \Leftrightarrow 1 - 2\lambda = 0 \Leftrightarrow \lambda = \frac{1}{2}$. On a donc $\overrightarrow{u} = \frac{1}{2}\overrightarrow{u_0} = (0, \frac{1}{2}, 0, 0)$ et $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{e_1} - \overrightarrow{u} = (1, -\frac{1}{2}, 0, 0) \in H$.

Exercice 3 - 1. Les colonnes de A sont toutes multiples de $\overrightarrow{v_1} = (1,-2,-1)$. On a donc $\mathrm{rang}\, A = 1$ et $\mathrm{Im}\, f$ est la droite engendrée par $\overrightarrow{v_1}$.

Comme $\mathrm{Im}\, f \neq \mathbb{R}^3$, f n'est pas surjective.

2. Par le théorème du rang $\dim \ker f = 3 - \mathrm{rang}\, f = 2$.

On a $f(x,y,z) = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow x - 2y + 5z = 0$, qui est donc l'équation du plan $\ker f$. Une base est donnée par $((2,1,0), (-5,0,1))$.

3. On calcule $A \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. On a donc $\overrightarrow{v_1} = (1,-2,-1) \in \ker f \cap \mathrm{Im}\, f$. Les espaces $\ker f$ et $\mathrm{Im}\, f$ ne sont donc pas supplémentaires.

4. Si $\overrightarrow{u} \in \mathrm{Im}\, f$ alors $\overrightarrow{u} = \lambda \overrightarrow{v_1} = \lambda(1,-2,-1)$. On a alors $f(\overrightarrow{u}) = \lambda f(\overrightarrow{v_1}) = \overrightarrow{0}$ d'après le calcul précédent. Ceci montre que $\mathrm{Im}\, f \subset \ker f$. En particulier, pour tout $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^3$, on a $\overrightarrow{u} = f(\overrightarrow{v}) \in \ker f$ et donc $f(\overrightarrow{u}) = (f \circ f)(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}$. Cela signifie que $f \circ f = 0$ (peut se vérifier avec $A^2 = 0$).

Exercice 4 - 1. $B' = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ est une base de $\mathbb{R}^2$ car $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ ne sont pas colinéaires. On trouve que $\overrightarrow{e_1} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2} = (1,1)_{B'}$ et $\overrightarrow{e_2} = \overrightarrow{v_1} + 2\overrightarrow{v_2} = (1,2)_{B'}$.

2. On a par définition de f, $M = \mathrm{Mat}_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$. M est inversible car de rang 2. De plus $M^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2$ (f est une symétrie par définition).

3. D'après 1, on a $f(\overrightarrow{e_1}) = f(\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}) = \overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2} = (3,-2)$ et $f(\overrightarrow{e_2}) = f(\overrightarrow{v_1} + 2\overrightarrow{v_2}) = \overrightarrow{v_1} - 2\overrightarrow{v_2} = (4,-3)$. D'où, $N = \mathrm{Mat}_B(f) = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}$.