S2 PeiP — Orsay 2015-2016
Mathématiques

Contrôle n°2 du 17 mars 2016

Durée 1 heure 30 min

La qualité de la rédaction interviendra dans l'appréciation de la copie. ***Les documents, calculatrices, montres connectées et téléphones portables sont interdits.***

Barème indicatif : $3+4+4+5+4$.

Exercice 1 - Soit m un réel donné. Résoudre, en fonction de la valeur de m, le système suivant :

$$(S)\left\{\begin{array}{r} x+2y+3z=1 \\ x+3y+4z=1 \\ x+4y+(m+5)z=m+1 \end{array}\right.$$

Exercice 2 - Dans $\mathbb{R}^3$, on considère l'ensemble

$$E=\{\overrightarrow{u}\in\mathbb{R}^3 \text{ de la forme } \overrightarrow{u}=(a+b+2c, a+2b+c, a-b+4c) \text{ avec } a,b,c\in\mathbb{R}\}.$$

1. Montrer que E est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$ et en donner une famille génératrice.

2. Donner une base de E. A-t-on $E=\mathbb{R}^3$?

Exercice 3 - On considère le plan P de $\mathbb{R}^3$ engendré par $\overrightarrow{u_1}=(1,1,1)$ et $\overrightarrow{u_2}=(1,2,3)$. Pour a réel, on note $\overrightarrow{v_a}=(3,a,1)$.

1. Pour quelle(s) valeur(s) de a, a-t-on $\overrightarrow{v_a}\in P$? Calculer dans ce(s) cas, les coordonnées de $\overrightarrow{v_a}$ dans la base $B=(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2})$ de P.

2. Pour quelle(s) valeur(s) de a, la famille $\mathcal{F}_a=(\overrightarrow{u_1},\overrightarrow{u_2},\overrightarrow{v_a})$ est-elle une base de $\mathbb{R}^3$? Calculer dans ce(s) cas les coordonnées de $\overrightarrow{v}=(1,4,7)$ dans cette base.

Exercice 4 - Dans $\mathbb{R}^4$, on considère le sous-espace vectoriel

$$E=\{\overrightarrow{v}=(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 \mid x+z+t=0\}.$$

1. Déterminer la dimension et une base de E.

2. Soit P le plan engendré par $\overrightarrow{u_1}=(1,1,1,1)$ et $\overrightarrow{u_2}=(0,1,0,1)$. Déterminer une base de $E\cap P$.

3. Donner un supplémentaire F de E dans $\mathbb{R}^4$.

Exercice 5 - Soit $A=\begin{pmatrix}2&1\\1&0\end{pmatrix}$ et $f : X\mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ associé.

1. Calculer $f(X)$ pour $X=\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$.

2. Déterminer l'image par f de la droite D_0 de $\mathbb{R}^2$ d'équation $x+2y=0$, puis l'image par f de D_1 d'équation $x+2y=1$.