Contrôle n°3 du 14 avril 2016

Durée 1 heure 30

La qualité de la rédaction interviendra dans l'appréciation de la copie. ***Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.***

Barème indicatif : $4+6+4+6$.

Exercice 1 -

1. Donner, en le justifiant, un exemple de matrice A de taille 3×3 telle que $\ker A$ soit le plan engendré par $\overrightarrow{e_1}=(1,0,0)$ et $\overrightarrow{e_2}=(0,1,0)$ **et** l'image de A soit la droite engendrée par le vecteur $\overrightarrow{v}=(3,2,1)$.

2. Donner, en le justifiant, un exemple de matrice B de taille 3×3 telle que $\ker B$ soit la droite engendrée par le vecteur $\overrightarrow{v}=(3,2,1)$ **et** l'image de B soit le plan engendré par $\overrightarrow{e_1}=(1,0,0)$ et $\overrightarrow{e_2}=(0,1,0)$.

Exercice 2 - Soient a,b,c trois réels donnés avec a non nul.

1. Calculer la matrice $M=\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\times\begin{pmatrix}1&2&3\end{pmatrix}$.

On note $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ l'application linéaire $X\mapsto MX$ associée.

2. Quel est le rang de f ? Déterminer une équation de $\ker f$ et une base de $\operatorname{Im} f$.

3. Discuter et résoudre l'équation $f(x,y,z)=(1,1,1)$ suivant les valeurs de a, b et c.

4. À quelle condition sur a, b et c les espaces $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

5. On suppose que $a+2b+3c=0$. Calculer $f\circ f$.

Exercice 3 - Pour a paramètre réel, on considère la matrice $M_a=\begin{pmatrix}1&0&1\\1&1&1+a\\0&a&1\end{pmatrix}$.

1. Déterminer le rang de M_a en fonction de a.

2. Pour quels a, M_a est-elle inversible ? Calculer dans ce cas $(M_a)^{-1}\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}$.

Exercice 4 - On considère dans $\mathbb{R}^2$ les vecteurs $\overrightarrow{v_1}=(-1,2)$ et $\overrightarrow{v_2}=(1,-1)$.

1. Vérifier que $B'=(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2})$ est une base de $\mathbb{R}^2$. Calculer les coordonnées de $\overrightarrow{e_1}=(1,0)$ et $\overrightarrow{e_2}=(0,1)$ dans cette base.

Soit f l'unique application linéaire de $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ telle que $f(\overrightarrow{v_1})=\overrightarrow{v_1}$ et $f(\overrightarrow{v_2})=-\overrightarrow{v_2}$.

2. Donner la matrice M de f dans la base B'. Est-elle inversible ? Calculer M^2.

3. Calculer à l'aide de 1, et de la définition de f, les vecteurs $f(\overrightarrow{e_1})$ et $f(\overrightarrow{e_2})$. En déduire la matrice N de f dans la base canonique $B=(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2})$.