S2 PeiP — Orsay 2015-2016
Mathématiques

Contrôle n°4 du 18 mai 2016

Durée 1 heure 30

La qualité de la rédaction interviendra dans l'appréciation de la copie. ***Les documents, calculatrices et téléphones portables sont interdits.***

Barème indicatif : $4+4+7+5$.

Exercice 1 - Répondre, en le justifiant, aux questions suivantes :

1. une application linéaire $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ peut-elle être injective ? surjective ?

2. une application linéaire $g:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3$ peut-elle être injective ? surjective ?

Exercice 2 - Soit $f:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ une application linéaire telle que $f\circ f=-2\,\mathrm{Id}$.

1. Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$. Montrer que la famille $B=(\overrightarrow{v},f(\overrightarrow{v}))$ est libre. (On pourra raisonner par l'absurde et supposer que $f(\overrightarrow{v})=\lambda\overrightarrow{v}$.)

2. Donner la matrice de f dans cette base.

Exercice 3 - Dans $\mathbb{R}^3$, on note $B=(\overrightarrow{e_1},\overrightarrow{e_2},\overrightarrow{e_3})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$ et on considère les vecteurs $\overrightarrow{v_1}=(1,2,1)$, $\overrightarrow{v_2}=(0,1,1)$ et $\overrightarrow{v_3}=(-1,1,1)$.

1. Montrer que $B'=(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2},\overrightarrow{v_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Donner la matrice de passage P de B à B'. Calculer son inverse. Que vaut la matrice de passage de B' à B ?

2. Déterminer les coordonnées de $\overrightarrow{v}=x'\overrightarrow{v_1}+y'\overrightarrow{v_2}+z'\overrightarrow{v_3}$ dans la base B, et les coordonnées de $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\overrightarrow{e_3}$ dans la base B'.

On considère désormais l'application linéaire $f:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$ définie par

$$f(x'\overrightarrow{v_1}+y'\overrightarrow{v_2}+z'\overrightarrow{v_3})=x'\overrightarrow{v_1}+y'\overrightarrow{v_2}\,.$$

3. Écrire la matrice A' de f dans la base B'. Que représente géométriquement l'application f ?

4. Calculer la matrice A de f dans la base B.

Exercice 4 - On considère l'évolution d'un système qui a deux états possibles : A et B. D'un instant t à $t+1$, la probabilité de passer de A à B est $\dfrac{1}{4}$, et celle de passer de B à A est $\dfrac{1}{2}$.

1. Donner la matrice de transition M associée (dans la convention du cours).

2. Trouver un vecteur stationnaire non nul X_1 (satisfaisant $MX_1=X_1$).

3. Montrer qu'il existe une base $B'=(X_1,X_2)$ avec $MX_2=\dfrac{1}{4}X_2$.

4. Que vaut la matrice M' de l'application linéaire associée à M dans la base B' ?

5. Calculer $(M')^n$ pour $n\in\mathbb{N}^*$.