Corrigé du contrôle n°3 du 14 avril 2016

Exercice 1 -

1. Les deux premières colonnes de A doivent être nulles car on veut que $A(\overrightarrow{e_1}) = A(\overrightarrow{e_2}) = \overrightarrow{0}$. La troisième colonne doit alors engendrer l'image de A, c'est-à-dire être un multiple non nul de $\overrightarrow{v} = (3,2,1)$. On trouve donc $A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, ou tout autre multiple non nul.

2. L'image de B est toujours engendrée par les colonnes de B. On peut prendre ici $B(\overrightarrow{e_1}) = \overrightarrow{e_1}$ et $B(\overrightarrow{e_2}) = \overrightarrow{e_2}$ (ou tout autre base du plan engendré par $\overrightarrow{e_1}$ et $\overrightarrow{e_2}$). Par ailleurs, on veut

$$B(\overrightarrow{v}) = 3B(\overrightarrow{e_1}) + 2B(\overrightarrow{e_2}) + B(\overrightarrow{e_3}) = \overrightarrow{0}.$$

On doit donc avoir que la troisième colonne de B satisfait $B(\overrightarrow{e_3}) = -3B(\overrightarrow{e_1}) - 2B(\overrightarrow{e_2})$. On peut donc prendre $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 2 - 1. On a par définition $M = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & 2a & 3a \\ b & 2b & 3b \\ c & 2c & 3c \end{pmatrix}$.

2. Les trois colonnes de M sont colinéaires à $\overrightarrow{v} = (a,b,c) \neq \overrightarrow{0}$ car $a \neq 0$. Par conséquent $\operatorname{Im} f$ est la droite engendrée par $\overrightarrow{v}$ et $\operatorname{rang}(f) = \dim(\operatorname{Im} f) = 1$.

On a $(x,y,z) \in \ker f \Leftrightarrow f(x,y,z) = 0 \Leftrightarrow$

$$M \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} ax + 2ay + 3az = 0 \\ bx + 2by + 3bz = 0 \\ cx + 2cz + 3cz = 0 \end{cases} \Leftrightarrow x + 2y + 3z = 0 \text{ car } a \neq 0.$$

L'équation de $\ker f$ est donc $x + 2y + 3z = 0$.

3. L'équation $f(x,y,z) = (1,1,1)$ possède au moins une solution ssi $(1,1,1) \in \operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(a,b,c)$, c'est-à-dire ssi $(1,1,1)$ et (a,b,c) sont colinéaires $\Leftrightarrow a = b = c$. Dans ce cas,

$$f(x,y,z) = (1,1,1) \Leftrightarrow \begin{cases} ax + 2ay + 3az = 1 \\ ax + 2ay + 3az = 1 \\ ax + 2az + 3az = 1 \end{cases} \Leftrightarrow x + 2y + 3z = 1/a.$$

On a donc $(x,y,z) = (1/a - 2y - 3z, y, z) = (1/a, 0, 0) + y(-2,1,0) + z(-3,0,1)$, avec y et z quelconques.

4. On a $\dim \ker f + \dim \operatorname{Im} f = 2 + 1 = 3$, donc $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ sont supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$ ssi $\ker f \cap \operatorname{Im} f = \{0\}$, c'est-à-dire si $\overrightarrow{v} = (a,b,c) \notin \ker f \Leftrightarrow a + 2b + 3c \neq 0$.

5. Si $a+2b+3c=0$ alors $\overrightarrow{v} \in \ker f$ et alors $\operatorname{Im} f = \operatorname{Vect}(\overrightarrow{v}) \subset \ker f$.

Pour tout $\overrightarrow{u}=(x,y,z)$, on a donc $(f\circ f)(\overrightarrow{u}) = f(f(\overrightarrow{u})) = \overrightarrow{0}$ car $f(\overrightarrow{u}) \in \operatorname{Im} f \subset \ker f$. Finalement $f\circ f = 0$.

(On peut aussi le voir en calculant $M\times M = \begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix} \times (1\ 2\ 3) \times \begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix} \times (1\ 2\ 3) = 0$ car $(1\ 2\ 3)\times \begin{pmatrix} a\\ b\\ c\end{pmatrix} = a+2b+3c = 0$ ici.)

Exercice 3 - 1. En échelonnant M_a par la méthode du pivot, on obtient

$$\operatorname{rang}(M_a) = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1\\ 0 & 1 & a\\ 0 & a & 1\end{pmatrix} = \operatorname{rang}\begin{pmatrix} \boxed{1} & 0 & 1\\ 0 & \boxed{1} & a\\ 0 & 0 & 1-a^2\end{pmatrix}.$$

On a donc $\operatorname{rang}(M_a)=3$ lorsque $1-a^2\neq 0$ c'est-à-dire $a\neq \pm 1$. Pour $a=\pm 1$, on obtient $\operatorname{rang}(M_a)=2$.

2. La matrice M_a est inversible ssi son rang est 3, c'est-à-dire $a\neq\pm1$. Dans ce cas, on résout le système

$$M_a\begin{pmatrix} x\\ y\\ z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1\\ 1\\ 1\end{pmatrix} \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} x+z=1\\ x+y+(1+a)z=1\\ ay+az=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} \boxed{x}+z=1\\ y+az=0\\ ay+az=1\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} \boxed{x}+z=1\\ \boxed{y}+az=0\\ (1-a^2)z=1\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow z=\frac{1}{1-a^2}\,,\ y=-az=\frac{-a}{1-a^2}\,,\ x=1-z=\frac{-a^2}{1-a^2}.$$

Exercice 4 - 1. Les deux vecteurs $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$ forment une base B' de $\mathbb{R}^2$ car ils ne sont pas colinéaires. On a $\lambda_1\overrightarrow{v_1}+\lambda_2\overrightarrow{v_2}=(x,y)\Leftrightarrow$

$$\left\{\begin{array}{r} -\lambda_1+\lambda_2=x\\ 2\lambda_1-\lambda_2=y\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{r} \boxed{-\lambda_1}+\lambda_2=x\\ \lambda_2=y+2x\end{array}\right. \Leftrightarrow \left\{\begin{array}{l} \lambda_1=x+y\\ \lambda_2=2x+y\end{array}\right.,$$

et en particulier $\overrightarrow{e_1}=\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2}=(1,2)_{B'}$ et $\overrightarrow{e_2}=\overrightarrow{v_1}+2\overrightarrow{v_2}=(1,1)_{B'}$.

2. Par définition, les colonnes de $M=\operatorname{Mat}_{B'}(f)$ sont les coordonnées de $f(\overrightarrow{v_1})$ et $f(\overrightarrow{v_2})$ **dans la base B′**. On a donc $M=\operatorname{Mat}_{B'}(f)=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$.

On a $\det M=-1$ donc M est inversible, avec ici $M^{-1}=M$ et $M^2=I_2=\begin{pmatrix} 1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

3. On a par linéarité de f et les calculs de 1,

$$f(\overrightarrow{e_1})=f(\overrightarrow{v_1}+2\overrightarrow{v_2})=\overrightarrow{v_1}-2\overrightarrow{v_2}=(-3,4)$$
$$f(\overrightarrow{e_2})=f(\overrightarrow{v_1}+\overrightarrow{v_2})=\overrightarrow{v_1}-\overrightarrow{v_2}=(-2,3).$$

On a donc dans la base canonique : $N=\operatorname{Mat}_B(f)=\begin{pmatrix} -3 & -2\\ 4 & 3\end{pmatrix}$.