Corrigé du contrôle n°4 du 18 mai 2016

Exercice 1 - 1. Une application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ ne peut pas être injective. En effet, on a $\operatorname{Im} f \subset \mathbb{R}^2$ et donc $\operatorname{rang} f = \dim \operatorname{Im} f \leq 2$. Par le théorème du rang, on a alors $\dim \ker f = 3 - \operatorname{rang} f \geq 1$, et donc $\ker f \neq \{\overrightarrow{0}\}$.

Par contre, $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ peut-être surjective, comme par exemple $f(x, y, z) = (x, y)$.

2. L'application linéaire $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ définie par $g(x, y) = (x, y, 0)$ est bien injective.

Par contre, une application linéaire $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ ne peut pas être surjective car $\dim \operatorname{Im} f = \operatorname{rang} f = 2 - \dim \ker f \leq 2 < 3 = \dim \mathbb{R}^3$.

Exercice 2 - 1. Si la famille $B = (\overrightarrow{v}, f(\overrightarrow{v}))$ n'est pas libre, alors $f(\overrightarrow{v}) = \lambda \overrightarrow{v}$ puisque $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$ par hypothèse. On a alors

$$-2\overrightarrow{v} = (f \circ f)(\overrightarrow{v}) = f(f(\overrightarrow{v})) = \lambda f(\overrightarrow{v}) = \lambda^2 \overrightarrow{v}\,.$$

D'où $(\lambda^2 + 2)\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, ce qui n'est pas possible puisque $\lambda^2 + 2 > 0$ et $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$.

2. On a par construction que f transforme le premier vecteur de base $\overrightarrow{v}$ en le second $f(\overrightarrow{v})$ et que $f(f(\overrightarrow{v})) = -2\overrightarrow{v}$ par hypothèse sur f. On a donc dans la base $B = (\overrightarrow{v}, f(\overrightarrow{v}))$, $\operatorname{Mat}(f)_B = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Exercice 3 - 1. Pour savoir d'un coup si B' est une base et inverser la matrice de passage $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ de B à B', on étudie le système $x'\overrightarrow{v_1} + y'\overrightarrow{v_2} + z'\overrightarrow{v_3} = (x, y, z)$ aux inconnues x', y', z' $\iff$

$$PX' = X \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x'} - z' = x \\ 2x' + y' + z' = y \\ x' + y' + z' = z \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x'} - z' = x \\ \boxed{y'} + 3z' = y - 2x \\ y' + 2z' = z - x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x'} - z' = x \\ \boxed{y'} + 3z' = y - 2x \\ \boxed{z'} = -x + y - z \end{cases}$$

Le système possède une unique solution, et donc B' est une base. De plus on a $X' = P^{-1}X$ avec

$$\begin{cases} x' = x - z \\ y' = x - 2y + 3z \\ z' = -x + y - z \end{cases} \iff P^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

D'après le cours P^{-1} est aussi la matrice de passage de B' à B.

2. Les coordonnées (x, y, z) de $\overrightarrow{v} = x'\overrightarrow{v_1} + y'\overrightarrow{v_2} + z'\overrightarrow{v_3}$ dans la base B sont données par la formule

$$X = PX' \iff \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = P \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x' - z' \\ 2x' + y' + z' \\ x' + y' + z' \end{pmatrix}.$$

Les coordonnées de $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$ et $\overrightarrow{e_3}$ dans la base B' sont données par les trois colonnes de P^{-1}, qui est aussi la matrice de passage de B' à B d'après le cours.

3. On a par définition $f(\overrightarrow{v_1}) = \overrightarrow{v_1}$, $f(\overrightarrow{v_2}) = \overrightarrow{v_2}$ et $f(\overrightarrow{v_3}) = \overrightarrow{0}$, d'où

$$A' = \mathrm{Mat}_{B'}(f) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

D'après son action sur B', f est la projection sur le plan P engendré par $\overrightarrow{v_1}$ et $\overrightarrow{v_2}$, le long de la droite D engendrée par $\overrightarrow{v_3}$.

4. D'après le cours, on a $A' = P^{-1}AP \iff A = PA'P^{-1}$ (pour passer de B' à B), c'est-à-dire

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Remarque. On peut vérifier le calcul, en calculant $A\overrightarrow{v_1} = \overrightarrow{v_1}$, $A\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{v_2}$ et $A\overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{0}$.

Exercice 4 - 1. Comme la probabilité de passer de A à B est $1/4$, celle de rester en A est $1 - 1/4 = 3/4$. La probabilité de passer de B à A est $1/2$, et celle de rester en B est donc $1 - 1/2 = 1/2$.

Avec la convention du cours, la matrice de transition est alors $M = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$.

2. On cherche un vecteur $X_1 = (x, y)$ non nul tel que $MX_1 = X_1 \iff$

$$\begin{cases} 3x/4 + y/2 = x \\ x/4 + y/2 = y \end{cases} \iff -x/4 + y/2 = 0 \iff x = 2y.$$

Un vecteur état stationnaire est donc $X_1 = (2/3, 1/3)$ (ou tout autre multiple non nul, mais celui-ci est le vecteur normalisé pour avoir $x + y = 1$, de façon à interpréter x et y comme des probabilités d'être en A et B).

3. On cherche un vecteur $X_2 = (x, y)$ tel que $MX_2 = \dfrac{1}{4}X_2 \iff$

$$\begin{cases} 3x/4 + y/2 = x/4 \\ x/4 + y/2 = y/4 \end{cases} \iff x/2 + y/2 = 0 \iff x = -y.$$

Le vecteur $X_2 = (1, -1)$ convient donc, et forme une base de $\mathbb{R}^2$ avec le vecteur non colinéaire $X_1 = (2/3, 1/3)$.

4. Dans la base $B' = (X_1, X_2)$, l'application linéaire associée à M a pour matrice $M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$, puisque par construction $MX_1 = X_1$ et $MX_2 = \dfrac{1}{4}X_2$.

5. Par une récurrence immédiate, on a $(M')^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/4^n \end{pmatrix}$ (ce qui démontre la convergence en temps grand de tout état vers un état stationnaire).