Math S2 PeiP
Chapitre 2
Équations différentielles linéaires du second ordre

Michel Rumin

1 Présentation et généralités

Nous allons étudier les équations différentielles de la forme

$$(E) \quad : \quad ay'' + by' + cy = f,$$

où f est une fonction (connue) définie sur un intervalle I de $\mathbb{R}$, et a, b, c trois réels avec $a \neq 0$.

On cherche à **intégrer** (ou **résoudre**) l'équation (E), c'est-à-dire à trouver toutes les fonctions $y : x \mapsto y(x)$ solutions de (E) de I.

1.1 Exemples issus de la physique

Les équations de type (E) se rencontrent dans différents domaines en physique.

Mécanique : oscillateur forcé amorti. On considère une masse m se déplaçant sur la droite $\mathbb{R}$. On note $x(t)$ sa position à l'instant t. Cette masse est soumise à 3 forces :
- une force de rappel élastique $f_1 = -k\,x(t)$ (k constante ≥ 0),
- une force de frottement fluide $f_2 = -Cx'(t)$, proportionnelle à la vitesse de m et opposée au mouvement ($C \geq 0$),
- une force d'entraînement extérieure f_e, par exemple la gravité, un champ électrique si m est chargée...

Le principe de la dynamique de Newton s'écrit :

$$mx''(t) = \sum \text{forces} = -kx(t) - Cx'(t) + f_e(t)\,,$$

c'est-à-dire

$$mx''(t) + Cx'(t) + kx(t) = f_e(t)\,, \tag{1}$$

qui est bien du type étudié (E). On voudrait connaître le mouvement de m en fonction de la force extérieure f_e et des conditions initiales : position $x(t_0)$ et vitesse $x'(t_0)$ à un instant t_0.

Électricité : système RLC. Ici, on considère un circuit électrique constitué d'une résistance R, d'une bobine (inductance) L et d'une capacité C mis en série. L'ensemble est soumis à une tension (extérieure) $U(t)$.

Soit $i(t)$ l'intensité dans le circuit. On a :

- $U_R = R\,i(t)$: loi d'Ohm,
- $U_L = Li'(t)(= L\dfrac{di}{dt}$, en notation physique),
- U_C détermine la charge du condensateur $Q(t) = CU_C(t)$ avec $\dfrac{dQ}{dt} = i(t) = CU_C'(t)$.

D'où

$$U(t) = U_R(t) + U_L(t) + U_C(t) = Ri(t) + Li'(t) + U_C(t)\,,$$

et en dérivant

$$U'(t) = \frac{i(t)}{C} + Ri'(t) + Li''(t), \tag{2}$$

qui est aussi une équation différentielle du type (E), avec $i(t)$ fonction inconnue et $U(t)$ tension extérieure imposée (par exemple $U(t) = 0$ si le circuit est fermé).

1.2 Généralités

Structure de l'espace des solutions.

On associe à (E) une équation **homogène** (ou équation sans second membre)

$$(H) \quad : \quad ay'' + by' + cy = 0\,.$$

Théorème 1.1. *Soit y_0 **une** solution (dite particulière) de (E). Alors **toute (autre)** solution y de (E) s'écrit sous la forme*

$$y = y_0 + y_H\,,$$

où y_H est une solution de l'équation homogène (H).

Démonstration. C'est un phénomène général pour les équations (différentielle ou non) **linéaires** avec un second membre. Soit y_0 une solution particulière de (E). Alors une fonction y est une (autre) solution de (E) si et seulement si

$$\begin{aligned} & ay'' + by' + cy = f = ay_0'' + by_0' + cy_0 \\ \iff & a(y-y_0)'' + b(y-y_0)' + c(y-y_0) = 0 \\ \iff & y - y_0 = y_H \text{ est une solution de l'équation homogène (H).} \end{aligned}$$

□

Pour résoudre (E) nous devons donc :

1. trouver **toutes** les solutions de l'équation homogène (H),
2. et trouver au moins **une** solution particulière de (E).

Calculs avec des fonctions à valeurs complexes. Nous allons voir que les équations homogènes (H) ont en général des solutions oscillantes, amorties ou non, du type

$$y_H(x) = C_1 e^{\lambda x}\cos(\omega x) + C_2 e^{\lambda x}\sin(\omega x)\,. \tag{3}$$

Dans la pratique, il est plus efficace pour dériver ce genre de fonctions de travailler avec des fonctions à valeurs complexes. Si $y : I \to \mathbb{C}$, on a

$$y = y_1 + iy_2 \quad \text{avec} \quad y_1 = \mathrm{Re}(y) \quad \text{et} \quad y_2 = \mathrm{Im}(y)\,.$$

Par exemple, la fonction y_H s'écrit simplement

$$y_H(x) = \mathrm{Re}(Ce^{rx}) \quad \text{avec} \quad C = C_1 - iC_2 \quad \text{et} \quad r = \lambda + i\omega\,.$$

Si y_1 et y_2 sont des fonctions dérivables à valeurs réelles, et $y = y_1 + iy_2$ à valeurs complexes, on pose

$$y' = y_1' + iy_2'\,.$$

Ceci signifie que dérivée, partie réelle et imaginaire sont compatibles :

$$\mathrm{Re}(y') = \mathrm{Re}(y)' \quad \text{et} \quad \mathrm{Im}(y') = \mathrm{Im}(y)'\,.$$

On admet la proposition suivante.

Proposition 1.2. *Pour les fonctions à valeurs complexes, les règles de dérivation classiques : somme, produit et composition, restent valables.*

Comme cas particulier intéressant ici, on a pour r complexe

$$(e^{rx})' = re^{rx} \quad \text{et} \quad (x^n e^{rx})' = nx^{n-1}e^{rx} + rx^n e^{rx}\,. \tag{4}$$

Cela peut bien sûr se vérifier à la main. Par exemple, pour $y_H = Re(Ce^{rx})$ dans (3), on a

$$y_H' = \mathrm{Re}(Cre^{rx}) \quad \text{et} \quad y_H'' = \mathrm{Re}(Cr^2 e^{rx})\,.$$

Principe de superposition. La remarque suivante est évidente mais utile en pratique.

Proposition 1.3 (Principe de superposition.)**.** *Si y_1 satisfait $ay_1'' + by_1' + cy_1 = f_1$, et y_2 satisfait $ay_2'' + by_2' + cy_2 = f_2$, alors $y = y_1 + y_2$ satisfait*

$$ay'' + by' + cy = f_1 + f_2\,.$$

2 Solutions de l'équation homogène

La méthode pour résoudre l'équation différentielle homogène (H) est la suivante.

Théorème 2.1. *Soit (H) l'équation homogène $ay'' + by' + cy = 0$.* ***L'équation caractéristique*** *de (H) est : $ar^2 + br + c = 0$. On calcule le discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ et les racines (éventuellement complexes) r_1 et r_2.*

- *Si $\Delta > 0$, les racines r_1 et r_2 sont réelles distinctes et la solution réelle générale de (H) est*

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \quad \text{avec} \quad C_1\,, C_2 \in \mathbb{R} \quad \textit{(régime apériodique).}$$

- *Si $\Delta = 0$, on a une racine réelle double $r = -\dfrac{b}{2a}$, et la solution réelles générale de (H) s'écrit*

$$y = C_1 e^{rx} + C_2 x e^{rx} \quad \text{avec} \quad C_1\,, C_2 \in \mathbb{R} \quad \textit{(régime critique).}$$

- *Si $\Delta < 0$, on a deux racines complexes conjuguées : $r_1 = \lambda + i\omega$ et $r_2 = \overline{r}_1 = \lambda - i\omega$. Les solutions* ***complexes*** *de (H) s'écrivent :*

$$y = C_1 e^{r_1 x} + C_2 e^{r_2 x} \quad \text{avec} \quad C_1\,, C_2 \in \mathbb{C}\,,$$

et les solutions ***réelles*** *de (H) sont :*

$$y = C_1' \cos(\omega x) e^{\lambda x} + C_2' \sin(\omega x) e^{\lambda x} \quad \text{avec} \quad C_1'\,, C_2' \in \mathbb{R} \quad \textit{(régime pseudo-périodique).}$$

Remarques 2.2.
- Ces solutions sont définies pour tout x (sur $I = \mathbb{R}$).
- L'ensemble de ces solutions, dépendant de deux paramètres, s'appellent la **solution générale** de (H).

Démonstration. • On vérifie que les solutions proposées conviennent. Soit $y = e^{rx}$ avec $r \in \mathbb{C}$. Alors d'après la proposition 1.2, on a $y' = re^{rx}$ et $y'' = r^2 e^{rx}$, d'où y est solution de (H) ssi

$$ay'' + by' + cy = 0 = (ar^2 + br + c)e^{rx} \iff ar^2 + br + c = 0\,,$$

c'est-à-dire ssi r est racine de l'équation caractéristique. Si le discriminant $\Delta \neq 0$, on a deux racines complexes distinctes et deux solutions $y_1 = e^{r_1 x}$ et $y_2 = e^{r_2 x}$. Si $\Delta = 0$, on a une racine double $r = -\frac{b}{2a}$ et qu'une solution (pour l'instant). On considère $y = xe^{rx}$. On a $y' = (1+rx)e^{rx}$ et $y'' = (2r + r^2 x)e^{rx}$, d'où

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy &= (a(2r + r^2 x) + b(1+rx) + cx)e^{rx} \\ &= (2ar + b + x(ar^2 + br + c))e^{rx} = 0\,. \end{aligned}$$

Dans tous les cas, on a obtenu deux solutions y_1 et y_2 de (H). Alors, d'après le principe de superposition (ou linéarité de (H)), les fonctions

$$y = C_1 y_1 + C_2 y_2\,,$$

avec C_1 et C_2 complexes sont toutes des solutions complexes de (H), proposées dans l'énoncé.

• On vérifie que les solutions obtenues sont les seules possibles. Soit r une racine caractéristique et y une solution quelconque. On peut l'écrire sous la forme $y(x) = z(x)e^{rx}$ car $e^{rx} \neq 0$. On a alors :

$$y' = (z' + rz)e^{rx} \quad \text{et} \quad y'' = (z'' + 2rz' + r^2 z)e^{rx}\,,$$

d'où

$$\begin{aligned} ay'' + by' + cy = 0 &= (az'' + (2ar + b)z' + (ar^2 + br + c)z)e^{rx} \\ &= (az'' + (2ar + b)z')e^{rx} = 0 \\ &\Longleftrightarrow az'' + (2ar + b)z' = 0\,. \end{aligned}$$

C'est une équation différentielle **du premier ordre**[1] en $\varphi = z'$

$$a\varphi' + (2ar + b)\varphi = 0\,.$$

Ces solutions sont

$$z' = \varphi = \begin{cases} C_1' e^{-(2r + \frac{b}{a})x} & \text{si} \quad 2ar + b \neq 0 \Leftrightarrow r \neq -\frac{b}{2a} \Leftrightarrow \Delta \neq 0\,, \\ C_1' & \text{si} \quad r = -\frac{b}{2a} \Leftrightarrow \Delta = 0\,. \end{cases}$$

d'où en intégrant

$$z = \begin{cases} C_1 e^{-(2r + \frac{b}{a})x} + C_2 & \text{si} \quad \Delta \neq 0\,, \\ C_1 x + C_2 & \text{si} \quad \Delta = 0\,. \end{cases}$$

Finalement,

- Pour $\Delta \neq 0$, $y(x) = z(x)e^{rx} = C_2 e^{rx} + C_1 e^{(-\frac{b}{a} - r)x}$ où $r' = -\frac{b}{a} - r$ est l'autre racine caractéristique.
- Pour $\Delta = 0$, $y(x) = z(x)e^{rx} = (C_1 x + C_2)e^{rx}$.

On a donc obtenu toutes les solutions complexes de (H).

• **Passage aux solutions réelles.** Si y est une solution complexe de (H), on a aussi $a\overline{y}'' + b\overline{y}' + c\overline{y} = \overline{ay'' + by' + cy} = 0$ car a, b, c sont réels. D'où par superposition $\mathrm{Re}(y) = \frac{y + \overline{y}}{2}$ et $\mathrm{Im}(y) = \frac{y - \overline{y}}{2i}$ sont solutions réelles de (H). Inversement, les solutions réelles sont complexes.

□

1. C'est pourquoi cette technique s'appelle méthode de la réduction de l'ordre.

Exemple. On reprend l'exemple (1) de l'oscillateur (amorti) libre (sans force d'entraînement)

$$mx''(t) + Cx'(t) + kx(t) = 0\,.$$

L'équation caractéristique est $mr^2 + Cr + k = 0$, d'où $\Delta = C^2 - 4km$. On étudie le comportement des solutions en fonction de taille du coefficient de frottement C.

• Si $C^2 > 4km$, le coefficient de frottement C est grand, et on a deux racines réelles $r_{1,2} = \dfrac{-C \pm \sqrt{C^2 - 4km}}{2m}$. Ces deux racines sont négatives et les solutions sont de la forme

$$x(t) = C_1 e^{r_1 t} + C_2 e^{r_2 t}\,,$$

exponentiellement décroissantes en temps. C'est un cas de retour rapide vers l'équilibre, apériodique (sans oscillation) par **fort amortissement**.

• Si $C^2 = 4km$, on a $\Delta = 0$ et une racine double $r = -\dfrac{C}{2m} < 0$ et les solutions sont

$$x(t) = C_1 e^{rt} + C_2 t e^{rt}$$

rapidement décroissantes également. C'est le régime dit critique.

• Si $C^2 < 4km$, le coefficient de frottement est faible. On a $\Delta < 0$ et des racines complexes conjuguées

$$r_{1,2} = \frac{-C \pm \sqrt{C^2 - 4km}}{2m} = -\frac{C}{2m} \pm i\sqrt{\frac{k}{m} - \frac{C}{2m}}\,.$$

On a des solutions oscillantes avec amortissement vers la position d'équilibre (si le coefficient de frottement $C > 0$)

$$x(t) = C_1 \cos(\omega t) e^{-\lambda t} + C_2 \sin(\omega t) e^{-\lambda t}\,,$$
$$\text{avec } \lambda = \frac{C}{2m} \text{ et } \omega^2 = \frac{k}{m} - \lambda\,.$$

C'est le régime **pseudo-périodique**.

Un cas particulier important est celui de l'oscillateur non amorti avec $C = 0$. L'équation est

$$mx''(t) + kx(t) = 0 \Longleftrightarrow x'' + \omega_0^2 x = 0$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$. On a ici

$$x(t) = C_1 \cos(\omega_0 t) + C_2 \sin(\omega_0 t)\,.$$

Le système oscille indéfiniment à sa **fréquence propre** $\omega_0/2\pi$, c'est un mouvement **périodique** de période $T = 2\pi/\omega_0$.

3 Recherche d'une solution particulière

Nous cherchons une solution particulière de l'équation avec second membre f lorsqu'il est du type polynôme $\times$ exponentielle complexe : $f(x) = P(x)e^{sx}$. [2]

Théorème 3.1. *Soit*

$$(E) \quad : \quad ay'' + by' + cy = P(x)e^{sx}$$

avec P un polynôme de degré n et $s \in \mathbb{C}$. Alors, (E) possède une solution particulière y_0 de la forme :

- $y_0 = Q(x)e^{sx}$ *si s n'est pas racine de l'équation caractéristique $ar^2 + br + c = 0$,*
- $y_0 = xQ(x)e^{sx}$ *si s est racine simple de $ar^2 + br + c = 0$,*
- $y_0 = x^2Q(x)e^{sx}$ *si s est racine double de $ar^2 + br + c = 0$.*

Dans tous les cas, Q est un polynôme de même degré n que P.

Il n'y a pas de formule générale simple pour Q, on cherche la solution sous la forme proposée avec $Q(x) = a_0 + a_1x + \cdots a_nx^n$ inconnu, et on résout le système linéaire correspondant.

Exemples. • Résoudre (E) : $y'' + y' - 2 = e^{2x}$. L'équation caractéristique est $r^2 + r - 2 = 0$ a pour racines $r = 1$ et $r = -2$. Les solutions du système homogène sont $y_H = C_1e^x + C_2e^{-2x}$. Comme 2 n'est pas racine caractéristique alors il existe une solution particulière de (E) du type $y_0 = Ce^{2x}$. On a alors

$$y_0'' + y_0' - 2y_0 = 4Ce^{2x} + 2Ce^{2x} - 2Ce^{2x} = 4Ce^{2x}\,,$$

et y_0 est solution de (E) pour $C = \dfrac{1}{4}$. Les solutions de (E) sont donc les fonctions

$$y = y_0 + y_H = \frac{1}{4}e^{2x} + C_1e^x + C_2e^{-2x} \quad \text{avec} \quad C_1\,,\ C_2 \text{ réels.}$$

• Résoudre (E) : $y'' + y' - 2 = e^{-2x}$. Le système homogène est le même que ci-dessus, mais désormais l'exposant -2 (de e^{-2x} dans le second membre) est racine caractéristique. On cherche donc une solution particulière y_0 sous la forme $y_0 = Cxe^{-2x}$. On a

$$y_0' = C(1 - 2x)e^{-2x} \quad \text{et} \quad y_0'' = C(-2 - 2(1 - 2x))e^{-2x} = C(4x - 4)e^{-2x}\,,$$

2. Il existe une méthode générale appelée « variation de la constante », à voir en L2.

d'où
$$y_0'' + y_0' - 2y_0 = C(4x - 4 + 1 - 2x - 2x)e^{-2x} = -3Ce^{-2x}$$
et $y_0 = -\frac{x}{3}e^{-2x}$ est solution particulière de (E). Les solutions de (E) sont
$$y = y_0 + y_H = -\frac{x}{3}e^{-2x} + C_1 e^x + C_2 e^{-2x}\,.$$

• **L'oscillateur forcé.** Soient ω_0 et $\omega > 0$. On considère l'équation
$$(E) \quad : \quad y'' + \omega_0^2 y = \sin(\omega x)\,,$$
associée à un système masse-force élastique ou à un circuit L,C, sans résistance, mais soumis à une force ou potentiel extérieur, voir §1.1.

L'équation caractéristique est $r^2 + \omega_0^2 = 0$ de racines $r = \pm i\omega_0$. Les solutions réelles du système homogène sont
$$y_H = C_1 \cos(\omega_0 x) + C_2 \sin(\omega_0 x)\,.$$
Le second membre de (E) n'est pas du type étudié dans le théorème 3.1 mais on s'y ramène facilement. En effet on a $\sin(\omega x) = \mathrm{Im}(e^{i\omega x})$ et si Y est une solution particulière de
$$(E_{\mathbb{C}}) \quad : \quad Y'' + \omega_0^2 Y = e^{i\omega x}\,,$$
alors $y_0 = \mathrm{Im}(Y)$ est une solution particulière de (E). C'est un principe général.

Proposition 3.2. *Soit Y une solution complexe de $aY'' + bY' + cY = f$, avec a, b, c réels et f complexe.*

Alors $y = \mathrm{Re}(Y)$ (resp. $\mathrm{Im}(Y)$) satisfait $ay'' + by' + cy = \mathrm{Re}(f)$ (resp. $= \mathrm{Im}(f)$).

Démonstration. On identifie les parties réelles et imaginaire de $aY'' + bY' + cY = f$, ou on utilise le principe de superposition en écrivant $y = \frac{Y+\overline{Y}}{2}$. □

On revient à (E) et ($E_{\mathbb{C}}$).

1. Si $\omega \neq \omega_0$, alors $i\omega$ n'est pas racine caractéristique de (H) et il existe une solution particulière de ($E_{\mathbb{C}}$) de la forme $Y = Ce^{i\omega}$. On a
$$Y'' + \omega_0^2 Y = C(-\omega^2 + \omega_0^2)e^{i\omega x} = e^{i\omega x} \Longleftrightarrow C = \frac{1}{\omega_0^2 - \omega^2}\,,$$
d'où $Y = \dfrac{e^{i\omega x}}{\omega_0^2 - \omega^2}$ et $y_0 = \mathrm{Im}(Y) = \dfrac{\sin(\omega x)}{\omega_0^2 - \omega^2}$. Les solutions réelles de (E) sont
$$y = y_0 + y_H = \frac{\sin(\omega x)}{\omega_0^2 - \omega^2} + C_1 \cos(\omega_0 x) + C_2 \sin(\omega_0 x) \quad \text{avec} \quad C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}.$$

2. Si $\omega = \omega_0$, alors $i\omega_0$ est racine caractéristique, et on cherche une solution particulière de ($E_{\mathbb{C}}$) sous la forme $Y = Cxe^{i\omega_0 x}$. On a $Y' = C(1 + i\omega_0 x)e^{i\omega_0 x}$ et $Y'' = C(2i\omega_0 - \omega_0^2 x)e^{i\omega_0 x}$ d'où
$$Y'' + \omega_0^2 Y = 2Ci\omega_0 e^{i\omega_0 x} = e^{i\omega_0 x} \Leftrightarrow C = -\frac{i}{2\omega_0}\,.$$

On a alors $y_0 = \mathrm{Im}(Y) = \mathrm{Im}\big(-\dfrac{ix}{2\omega_0}e^{i\omega_0 x}\big) = -\dfrac{x}{2\omega_0}\cos(\omega_0 x)$, et les solutions réelles de (E) sont

$$y = y_0 + y_H = -\frac{x}{2\omega_0}\cos(\omega_0 x) +_1 \cos(\omega_0 x) + C_2 \sin(\omega_0 x) \quad \text{avec} \quad C_1,\ C_2 \in \mathbb{R}.$$

Dessin.

On constate que lorsque $\omega = \omega_0$, aucune solution de (E) n'est bornée. Les amplitudes du mouvement augmentent. Cela se produit uniquement lorsque la fréquence d'excitation (d'entraînement) est égale à la fréquence propre ω_0 du système. C'est le **phénomène de résonance**.

• Le principe de superposition (Proposition 1.3 permet de résoudre des équation du type $ay'' + by' + cy = f$ avec des seconds membres plus compliqués. Par exemple, pour

$$(E) \quad : \quad y'' + \omega_0^2 y = \cos^2(\omega x) = \frac{1}{2} + \frac{\cos(2\omega x)}{2}\,,$$

On a une solution particulière y_0 comme somme d'une solution particulière pour $y'' + y = \frac{1}{2}$ ($y_1 = \frac{1}{2}$ convient), et d'une solution particulière pour $y'' + y = \dfrac{\cos(2\omega x)}{2}$ étudiée ci-dessus (à un facteur 2 près). Le phénomène de résonance (solutions non bornées) se produit pour $\omega = \dfrac{\omega_0}{2}$.

4 Solutions satisfaisant des conditions initiales

Les équations étudiées ont toutes une infinité de solutions dépendant de la valeur de **deux** paramètres. Une solution est déterminée uniquement par la donnée de deux conditions initiales $y(x_0) = C$ et $y'(x_0) = C'$. Physiquement, le mouvement est déterminé par la position et la vitesse du point à un instant donné.

Théorème 4.1. *Il existe une **unique** solution de (E) : $ay'' + by' + cy = f$ satisfaisant les conditions initiales $y(x_0) = C$ et $y'(x_0) = C'$.*

En pratique :

1. on cherche toutes les solutions de (E).
2. On détermine les constantes C_1 et C_2 du théorème 2.1 à l'aide des conditions initiales. Cela donne un système linéaire de deux équations à deux inconnues qui possède une unique solution (raison à voir en L2).

Exemple. (E) : $y'' + y = 1$ avec conditions initiales $y(0) = 2$ et $y'(0) = 3$. On a $y = 1 + C_1 \cos(x) + C_2 \sin(x)$ avec

$$y(0) = 2 = 1 + C_1 \quad y'(0) = C_2 = 3 \Rightarrow y = 1 + \cos(x) + 3\sin(x)\,.$$

---

email : michel.rumin@math.u-psud.fr

page web : http://www.math.u-psud.fr/~rumin/enseignement/enseignement.html