Math S2 PeiP
Chapitre 4
$\mathbb{R}^n$ et ses sous-espaces vectoriels, bases, dimension

Michel Rumin

1 L'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$

1.1 Définition

On ne présente plus la droite réelle $\mathbb{R}$, le plan $\mathbb{R}^2$ et l'espace $\mathbb{R}^3$! De manière générale, nous allons travailler avec l'espace vectoriel $\mathbb{R}^n$ pour n entier quelconque.

Définition 1.1. Soit $n \geq 1$, un entier donné. On note $\mathbb{R}^n$ l'ensemble des n-uplets de réels, c'est-à-dire

$$\mathbb{R}^n = \{\overrightarrow{v} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \text{ avec } x_1,\ x_2, \cdots,\ x_n \text{ nombres réels}\}.$$

Les éléments $\overrightarrow{v}$ de $\mathbb{R}^n$ s'appellent des **vecteurs**. Les différents nombres réels x_i le constituant sont ses **composantes**.

Pourquoi faire ? Bien sûr, pour $n = 1$ on retrouve $\mathbb{R}$, pour $n = 2$ le plan $\mathbb{R}^2$, et pour $n = 3$ l'espace $\mathbb{R}^3$. L'idée abstraite de définir $\mathbb{R}^4$, $\mathbb{R}^5$, ou $\mathbb{R}^{1000}$ est de présenter un cadre général dans lesquels les problèmes à 4, 5 ou 1000 variables se modélisent. En effet, même si nous vivons (apparemment) en dimension 3, les phénomènes qui s'y déroulent peuvent dépendre d'un grand nombre de paramètres. En physique par exemple, l'évolution de la météo est décrite par des équations mettant en œuvre une quantité de données de pression, température, vitesse du vent prises en de nombreux points. Il en va de même pour les activités humaines, par exemple l'économie dépend de cours d'actions, des valeurs des monnaies, de ventes et achats des biens. En informatique, une photo numérique est constituée d'une suite énorme de données issues du capteur. La biologie s'appuie entre autres sur la génétique, les statistiques, etc.

Il nous faut donc apprendre à manipuler et résoudre des problèmes impliquant des quantités importantes de données. C'est là un des objectifs de l'algèbre linéaire, et une raison de son succès et omniprésence dans différentes sciences.

Heureusement, on va pouvoir travailler et calculer dans ces espaces $\mathbb{R}^n$ de *manière algébrique* sans « voir » en dimension plus grande que trois !

1.2 La structure d'espace vectoriel

Les espaces $\mathbb{R}^n$ sont très différents mais possèdent des opérations similaires.

• On peut **additionner** deux vecteurs de même taille.
Si $\overrightarrow{u} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ et $\overrightarrow{v} = (y_1, y_2, \cdots, y_n) \in \mathbb{R}^n$, on pose

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n) \in \mathbb{R}^n.$$

• On peut **multiplier** un vecteur de $\mathbb{R}^n$ par un **nombre réel** λ.
Si $\overrightarrow{u} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, on pose

$$\lambda.\overrightarrow{u} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Ces définitions généralisent les opérations connues dans le plan $\mathbb{R}^2$ et l'espace $\mathbb{R}^3$. Le vecteur $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}$ représente la diagonale du parallélogramme s'appuyant sur $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$, tandis que $\lambda.\overrightarrow{u}$ est le vecteur de même direction que $\overrightarrow{u}$ (ou de direction opposée si $\lambda < 0$) mais dilaté d'un facteur λ.

Attention, on ne peut pas additionner des vecteurs de tailles différentes, par exemple $(1, 0, 0) + (0, 0)$ n'existe pas (et d'ailleurs, Scilab refusera de la faire). Par définition, on ne voit pas ici $\mathbb{R}$ comme une partie de $\mathbb{R}^2$, ni $\mathbb{R}^2$ comme une partie de $\mathbb{R}^3$.

On note $\overrightarrow{0} = (0, 0, \cdots, 0) \in \mathbb{R}^n$ le **vecteur nul** de $\mathbb{R}^n$. Attention de ne pas le confondre avec le nombre zéro qui lui appartient à $\mathbb{R}$!

Proposition 1.2. *Les deux opérations définies ci-dessus vérifient les propriétés suivantes.*

a) L'addition est commutative : $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{u}$*, et associative :*

$$(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) + \overrightarrow{w} = \overrightarrow{u} + (\overrightarrow{v} + \overrightarrow{w})\,.$$

b) Le vecteur nul satisfait $\overrightarrow{v} + \overrightarrow{0} = \overrightarrow{v}$*.*

c) Tout vecteur $\overrightarrow{v} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ *possède un opposé, noté*

$$-\overrightarrow{v} = (-x_1, -x_2, \cdots, -x_n)$$

tel que $\overrightarrow{v} + (-\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{0}$*.*

d) $0.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, $1.\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v}$*.*

e) $\lambda.(\mu\overrightarrow{v}) = (\lambda\mu).\overrightarrow{v}$*.*

f) $(\lambda + \mu)\overrightarrow{v} = \lambda\overrightarrow{v} + \mu\overrightarrow{v}$*.*

g) $\lambda(\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}) = \lambda\overrightarrow{u} + \lambda\overrightarrow{v}$*.*

On dit que ces propriétés sont celles d'un **espace vectoriel**. Aussi abstraites qu'elles puissent paraître, elles possèdent un aspect géométrique. Par exemple, la propriété g) décrit l'action d'une homothétie sur la diagonale d'un parallélogramme.

Remarque 1.3. Notez que les opérations classiques sur les fonctions réelles vérifient également ce type de formules. Les espaces de fonctions sont aussi des espaces vectoriels, qui seront étudiés comme tels l'année prochaine.

1.3 Le produit scalaire et la norme euclidienne

Les opérations précédentes sont linéaires (de degré 1) par rapport aux composantes des vecteurs. Il existe sur $\mathbb{R}^n$ un produit de deux vecteurs qui généralise le produit scalaire dans le plan ou l'espace.

Définition 1.4. Soient $\overrightarrow{u} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ et $\overrightarrow{v} = (y_1, y_2, \cdots, y_n)$ deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$. On note

$$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n \in \mathbb{R}$$

le **produit scalaire** de $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

C'est une opération symétrique et **bilinéaire**, c'est-à-dire linéaire par rapport à chaque vecteur.

Proposition 1.5. *On a :*
$\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{u} \rangle,$
$\langle \lambda \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = \lambda \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle,$
$\langle \overrightarrow{u} + \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle = \langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{w} \rangle + \langle \overrightarrow{v}, \overrightarrow{w} \rangle.$

Comme dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$, ce produit scalaire permet de mesurer les angles et les longueurs des vecteurs.

Définition 1.6. • La **norme euclidienne** d'un vecteur $\overrightarrow{u} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ est

$$\|\overrightarrow{u}\| = \sqrt{\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{u} \rangle} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}\,.$$

• On dit que deux vecteurs $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ sont orthogonaux si $\langle \overrightarrow{u}, \overrightarrow{v} \rangle = 0$.

C'est de nouveau une extension à $\mathbb{R}^n$ général de notions d'origine géométrique dans $\mathbb{R}^2$ et $\mathbb{R}^3$.

Dans $\mathbb{R}^n$, il y a n directions d'axe deux à deux orthogonales, déterminées par les n vecteurs suivants, de norme 1 et deux à deux orthogonaux :

$$\begin{cases} \overrightarrow{e_1} = (1, 0, 0, \cdots, 0) \\ \overrightarrow{e_2} = (0, 1, 0, \cdots, 0) \\ \qquad \cdots \\ \overrightarrow{e_n} = (0, 0, 0, \cdots, 1) \end{cases}$$

On vérifie facilement que :

$$\|\overrightarrow{e_i}\| = 1 \text{ pour tout } i, \text{ et } \langle \overrightarrow{e_i}, \overrightarrow{e_j} \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}.$$

Attention, notez que le terme « produit scalaire » signifie que le résultat du produit de deux vecteurs est ici un **scalaire**, c'est-à-dire un nombre. Il ne faut pas confondre ce produit avec le **produit vectoriel**, noté $\overrightarrow{u} \wedge \overrightarrow{v}$ qui est un vecteur, mais qui n'est défini que dans $\mathbb{R}^3$. On ne sait pas multiplier deux vecteurs entre eux pour fabriquer un troisième vecteur (de manière utile) dans $\mathbb{R}^n$ en général.

2 Sous-espaces vectoriels

Il y a dans $\mathbb{R}^n$ des parties jouant un grand rôle : les sous-espaces vectoriels. Cette notion généralise celle de droite et de plan vectoriel que nous rappelons d'abord.

2.1 Droites et plans vectoriels

Les droites. Dans $\mathbb{R}^2$, il y a deux façons de définir une droite passant par $\overrightarrow{0}$:

- par une **équation cartésienne**

$$D = \{\overrightarrow{u} = (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid ax + by = 0\},$$

avec a ou b non nul. Si $b \neq 0$, on a $y = -\frac{a}{b}x$, et si $a \neq 0$, on a $x = -\frac{b}{a}y$.

> Notez que toutes ces droites **vectorielles** passent par définition par le **vecteur nul** $\overrightarrow{0}$. L'équation $ax + by = 1$ ne définit pas une droite vectorielle mais une **droite affine**, qui ne passe par $\overrightarrow{0}$. La notion d'espace affine sera introduite dans le §2.4.

- On peut aussi définir D en en donnant un **vecteur directeur** $\overrightarrow{v}$ non nul. On a alors

$$D = \{\lambda \overrightarrow{v} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Les deux méthodes sont équivalents dans $\mathbb{R}^2$ et par exemple la droite d'équation $ax+by = 0$ a pour vecteur directeur $\overrightarrow{v} = (-b, a)$ (ou aussi $(-\frac{a}{b}, 1)$ si $b \neq 0$, ou $(1, -\frac{a}{b})$ si $a \neq 0$).

Dans $\mathbb{R}^3$, il est moins efficace de définir D par des équations cartésiennes, car il en faudra **deux** du type $ax + by + cz = 0$ pour le faire, tandis qu'**un** seul vecteur directeur $\overrightarrow{v}$ est suffisant. En effet une équation équation cartésienne définit un plan dans $\mathbb{R}^3$, et une droite est l'intersection de deux plans.

On verra que cela s'empire dans $\mathbb{R}^n$, car il y faudra $n-1$ équations pour définir une droite, alors qu'un seul vecteur directeur suffit toujours.

> **Définition 2.1.** Soit $\overrightarrow{v}$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^n$. La droite vectorielle engendrée par $\overrightarrow{v}$ est par définition
> $$D = \{\lambda \overrightarrow{v} \mid \lambda \in \mathbb{R}\}.$$

Un autre avantage de cette écriture est qu'elle n'utilise pas explicitement les composantes des vecteurs. C'est une définition indépendante du choix du repère.

Les plans vectoriels. Dans $\mathbb{R}^3$, il y a deux façons de définir un plan passant par $\overrightarrow{0}$:

• par une équation cartésienne

$$P = \{\overrightarrow{u} = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid ax + by + cz = 0\},$$

avec a, b ou $c \neq 0$.

• ou en donnant deux vecteurs de P, mettons $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$, qui ne sont **pas colinéaires**, c'est-à-dire n'appartenant pas à une même droite vectorielle. On a alors

$$P = \{\overrightarrow{u} = \lambda\overrightarrow{v} + \mu\overrightarrow{w} \mid \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Cette seconde définition à l'avantage de s'appliquer dans tous les espaces $\mathbb{R}^n$, contrairement à la première qui est spécifique à $\mathbb{R}^3$.

On rappelle comment on passe de la présentation par équation à celle par vecteurs générateurs. Si $c \neq 0$ par exemple, on a

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{u} = (x, y, z) \in P \Leftrightarrow ax + by + cz = 0 \Leftrightarrow z &= -\frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y \\
\Leftrightarrow \overrightarrow{u} &= (x, y, -\frac{a}{c}x - \frac{b}{c}y) = (x, 0, -\frac{a}{c}x) + (0, y, -\frac{b}{c}y) \\
\Leftrightarrow \overrightarrow{u} &= x(1, 0, -\frac{a}{c}) + y(0, 1, -\frac{b}{c}) \\
\Leftrightarrow \overrightarrow{u} &= x\overrightarrow{v} + y\overrightarrow{w} \text{ avec } \overrightarrow{v} = (1, 0, -\frac{a}{c}) \text{ et } \overrightarrow{w} = (0, 1, -\frac{b}{c}).
\end{aligned}$$

On dit que le plan P est **engendré** par les vecteurs $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{w}$.

La donnée d'un vecteur d'un plan de $\mathbb{R}^3$ ne dépend effectivement que deux paramètres réels, ici x et y, et non pas trois composantes. Cette présentation est optimale et générale. Dans $\mathbb{R}^{100}$, un vecteur d'un plan ne dépend toujours que deux paramètres, et non de cent !

2.2 Définition des sous-espaces vectoriels

Les droites et plans vectoriels ont les propriétés communes suivantes :

1. si $\overrightarrow{v} \in D$ (ou P), alors $\lambda\overrightarrow{v} \in D$ (ou P) pour tout réel λ,
2. si $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v} \in D$, alors $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in D$ (ou P).

Pour $n > 3$, il existe dans $\mathbb{R}^n$ d'autres espaces importants satisfaisant ces propriétés.

Définition 2.2. On dit qu'une partie E de $\mathbb{R}^n$ est un **sous-espace vectoriel**, si

i) $\overrightarrow{0} \in E$,

ii) pour tout $\overrightarrow{v} \in E$, on a $\lambda\overrightarrow{v} \in E$ pour tout réel λ,

iii) pour tout $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v} \in E$, on a $\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} \in E$.

Par exemple, dans $\mathbb{R}^n$, les droites et plans vectoriels sont des sev (sous-espaces vectoriels), $\{\overrightarrow{0}\}$ est le plus petit sev (à ne pas confondre avec le vide $\emptyset$!), et $\mathbb{R}^n$ le plus gros.

Les sous-espaces vectoriels se rencontrent naturellement dans deux types de situation.

2.3 Systèmes d'équations homogènes

On dit qu'un système d'équations linéaires (S) est **homogène** si le second membre est nul. Si (S) a n équations et p inconnues, il s'écrit

$$(S) \left\{ \begin{array}{lcl} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p & = & 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p & = & 0 \\ \cdots & & \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ip}x_p & = & 0 \\ \cdots & & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p & = & 0 \end{array} \right. .$$

À chaque solution on peut associer un vecteur

$$\overrightarrow{v} = (x_1, x_2, \cdots, x_p) \text{ de } \mathbb{R}^p.$$

Proposition 2.3. *L'espace E des solutions d'un système (S) homogène à p inconnues est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^p$.*

Démonstration. - Comme le système est homogène on a $x_1 = x_2 = \cdots = x_p = 0$ solution et donc le vecteur nul $\overrightarrow{0} \in E$.

- Si $\overrightarrow{v} = (x_1, x_2, \cdots, x_p)$ est solution, on vérifie que $\lambda\overrightarrow{v} = (\lambda x_1, \lambda x_2, \cdots, \lambda x_p)$ est solution. En effet, pour la première équation, on a

$$\begin{aligned} a_{11}(\lambda x_1) + a_{12}(\lambda x_2) + \cdots + a_{1p}(\lambda x_p) &= \lambda(a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p) \\ &= \lambda 0 = 0\,, \end{aligned}$$

et de même pour les autres équations de (S).

- Si $\overrightarrow{u} = (x_1, x_2, \cdots, x_p)$ et $\overrightarrow{v} = (x'_1, x'_2, \cdots, x'_p)$ sont solutions, alors

$$\overrightarrow{u} + \overrightarrow{v} = (x_1 + x'_1, x_2 + x'_2, \cdots, x_p + x'_p)$$

l'est aussi. En effet, pour la première équation, on a

$$\begin{aligned} a_{11}(x_1 + x'_1) + a_{12}(x_2 + x'_2) \cdots + a_{1p}(x_p + x'_p) &= (a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p) \\ &\quad + (a_{11}x'_1 + a_{12}x'_2 + \cdots + a_{1p}x'_p) \\ &= 0 + 0 = 0, \end{aligned}$$

et de même pour les autres équations de (S). □

2.4 Systèmes non homogènes et sous-espaces affines

Lorsque le second membre d'un système (S) n'est pas nul, son espace de solution $E = \mathrm{Sol}(S)$ ne peut plus être un sous-espace vectoriel car il ne contient pas le vecteur nul $\overrightarrow{0}$. C'est un espace affine.

Définition 2.4. Si l'espace des solutions $E = \mathrm{Sol}(S)$ d'un système non homogène n'est pas vide, on dit que c'est un **espace affine**, de direction le sous-espace vectoriel associé au système homogène (S_H) de (S), et qui passe par une solution particulière $\overrightarrow{v_0}$ de (S).

Par exemple, l'équation $x + y = 1$ dans $\mathbb{R}^2$ définit une droite affine, passant par le vecteur $\overrightarrow{v_0} = (1, 0)$ et de direction la droite vectorielle d'équation $x + y = 0$.

En effet, tout point de la droite affine $x + y = 1$ s'écrit sous la forme $\overrightarrow{u} = (x, y) = \overrightarrow{v_0} + \overrightarrow{v_H}$ avec

$$\overrightarrow{v_H} = \overrightarrow{u} - \overrightarrow{v_0} = (x - 1, y) = (x_H, y_H)$$

satisfaisant $x_H + y_H = x + y - 1 = 0$.

Proposition 2.5. *Soit (S) un système et (S_H) le système homogène (sans second membre) associé. Si $\overrightarrow{v_0}$ est une **solution particulière** de (S), alors les solutions de (S) sont les vecteurs de la forme*

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{v_0} + \overrightarrow{v_H}$$

où $\overrightarrow{v_H}$ décrit le sous-espace vectoriel des solutions de (S_H).

Démonstration. Cela provient simplement du fait que par soustraction, le vecteur

$$\overrightarrow{v_H} = \overrightarrow{v} - \overrightarrow{v_0}$$

satisfait le système homogène si $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{v_0}$ satisfont (S). C'est un phénomène général des équations linéaires déjà rencontré dans l'étude des équations différentielles d'un chapitre précédent.

□

2.5 Combinaisons linéaires et sev engendrés par une partie

Les expressions que l'on manipule le plus souvent dans $\mathbb{R}^n$ sont les combinaisons linéaires de vecteurs.

Définition 2.6. Soient $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, $\cdots$, $\overrightarrow{v_p}$ p vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

Une **combinaison linéaire** de $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, $\cdots$, $\overrightarrow{v_p}$ est une expression du type

$$\overrightarrow{v} = \lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + \lambda_p\overrightarrow{v_p} \quad \text{avec } \lambda_1,\ \lambda_2,\ \cdots,\ \lambda_p \text{ réels.}$$

Ces collections de combinaisons linéaires donnent lieu à des sous-espaces vectoriels.

Proposition 2.7. *Soit A une partie non vide de $\mathbb{R}^n$. On note*

$$\mathrm{Vect}(A) = \textit{l'ensemble des combinaisons linéaires d'éléments de } A.$$

Alors on a :

1. $\mathrm{Vect}(A)$ *est un sous-espace vectoriel de* $\mathbb{R}^n$,
2. $\mathrm{Vect}(A)$ *est le **plus petit** sev de $\mathbb{R}^n$ contenant A, au sens que si un sev E contient A, alors il contient* $\mathrm{Vect}(A)$. *($A \subset E \Rightarrow \mathrm{Vect}(A) \subset E$ si E est un sev.)*

$\mathrm{Vect}(A)$ *s'appelle le sous-espace vectoriel **engendré** par A.*

Démonstration. 1. Pour $\overrightarrow{v} \in A$, on a $\overrightarrow{0} = 0\overrightarrow{v} \in \mathrm{Vect}(A)$. De plus la somme de deux combinaisons linéaires d'éléments de A est encore une combinaison linéaire (plus longue) d'éléments de A. Enfin,

$$\lambda(\lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + \lambda_p\overrightarrow{v_p}) = (\lambda\lambda_1)\overrightarrow{v_1} + (\lambda\lambda_2)\overrightarrow{v_2} + \cdots + (\lambda\lambda_p)\overrightarrow{v_p}$$

est bien une combinaison linéaire d'éléments de A.

L'ensemble $\mathrm{Vect}(A)$ satisfait les propriétés des sev.

2. Par définition, les combinaisons linéaires d'éléments d'un sev E restent dans E. On a donc bien
$$A \subset E \Rightarrow \mathrm{Vect}(A) \subset \mathrm{Vect}(E) = E \text{ si } E \text{ est un sev.}$$

$\square$

Premiers exemples. • Si $A = \{\overrightarrow{v}\}$ contient un seul vecteur, alors

$\mathrm{Vect}(A) = \{\overrightarrow{0}\}$ si $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$, ou

$\mathrm{Vect}(A) = \{\lambda\overrightarrow{v},\ \lambda \in \mathbb{R}\}$ est la droite vectorielle engendrée par $\overrightarrow{v}$ si $\overrightarrow{v} \neq \overrightarrow{0}$.

• Si $A = \{\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v}\}$, avec $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ non colinéaires, alors $\mathrm{Vect}(A) = \{\lambda\overrightarrow{u} + \mu\overrightarrow{v}, \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}$ est le plan vectoriel contenant $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$.

• Dans $\mathbb{R}^n$, si $A = \{\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_n}\}$ avec les vecteurs élémentaires

$$\begin{cases} \overrightarrow{e_1} = (1, 0, 0, \cdots, 0) \\ \overrightarrow{e_2} = (0, 1, 0, \cdots, 0) \\ \quad \cdots \\ \overrightarrow{e_n} = (0, 0, 0, \cdots, 1) \end{cases},$$

vus dans §1.3, alors on a

$$\begin{aligned} x_1\overrightarrow{e_1} + x_2\overrightarrow{e_2} + \cdots + x_n\overrightarrow{e_n} &= (x_1, 0, \cdots, 0) + (0, x_2, \cdots, 0) \\ &\quad + \cdots + (0, 0, \cdots, x_n) \\ &= (x_1, x_2, \cdots, x_n). \end{aligned}$$

Autrement dit, on a $\mathrm{Vect}(A) = \mathbb{R}^n$, c'est-à-dire que $\mathbb{R}^n$ est engendré par les n vecteurs $\overrightarrow{e_1}$, $\overrightarrow{e_2}$, $\cdots$, $\overrightarrow{e_n}$.

2.6 Systèmes linéaires et combinaisons linéaires

Tous les systèmes linéaires s'interprètent en termes de combinaisons linéaires, et inversement.

Un système linéaire (S) à p inconnues et n équations général s'écrit

$$(S)\quad \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1p}x_p &= y_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2p}x_p &= y_2 \\ \cdots & \\ a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 + \cdots + a_{ip}x_p &= y_i \\ \cdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \cdots + a_{np}x_p &= y_n \end{cases}.$$

Cela s'interprète comme l'égalité de deux vecteurs de $\mathbb{R}^n$.

On a

$$(S) \Longleftrightarrow x_1\overrightarrow{v_1} + x_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + x_p\overrightarrow{v_p} = \overrightarrow{y}$$

avec

$$\overrightarrow{v_1} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \cdots \\ a_{n1} \end{pmatrix},\ \overrightarrow{v_2} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \cdots \\ a_{n2} \end{pmatrix}, \cdots,\ \overrightarrow{v_p} = \begin{pmatrix} a_{1p} \\ a_{2p} \\ \cdots \\ a_{np} \end{pmatrix} \text{ et } \overrightarrow{y} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdots \\ y_n \end{pmatrix}.$$

Autrement dit, les coordonnées des vecteurs de la combinaison linéaire se retrouvent **en colonnes** dans le système associé.

Comme conclusion, les problèmes de combinaisons linéaires se ramènent à des systèmes.

Proposition 2.8. *Le système (S) possède au moins une solution si et seulement si le second membre $\overrightarrow{y}$ appartient au sous-espace vectoriel $E = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_p})$.*

Par ailleurs, on sait d'après la méthode du pivot de Gauss-Jordan, qu'un système linéaire (S) possède des solutions si et seulement si les équations de compatibilité d'un système échelonné équivalent sont satisfaites. Cet ensemble d'équations de compatibilité est un système homogène dépendant seulement du second membre $\overrightarrow{y}$ du système. C'est donc un système d'équations cartésiennes de $E = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_p})$: on a $\overrightarrow{y} \in E \Leftrightarrow$ les composantes de $\overrightarrow{y}$ satisfont les équations de compatibilité.

Corollaire 2.9. *Un système d'équations cartésiennes de $E = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_p}) \subset \mathbb{R}^n$ est donné par les conditions de compatibilité du système*

$$(S) : x_1\overrightarrow{v_1} + x_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + x_p\overrightarrow{v_p} = \overrightarrow{y}.$$

En particulier, s'il n'y a pas d'équation de compatibilité, alors $E = \mathbb{R}^n$.

Exemple. Soient $\overrightarrow{v_1} = (1,2,3)$, $\overrightarrow{v_2} = (4,5,6)$, $\overrightarrow{v_3} = (7,8,9)$ et $E = \text{Vect}(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$.
Questions. A-t-on $E = \mathbb{R}^3$? Déterminer un système d'équations cartésiennes de E.

On a $\overrightarrow{y} = (y_1, y_2, y_3) \in E$ ssi le système (S) : $x_1\overrightarrow{v_1} + x_2\overrightarrow{v_2} + x_3\overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{y}$ est compatible. Or on a

$$(S) \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 4x_2 + 7x_3 &= y_1 \\ 2x_1 + 5x_2 + 8x_3 &= y_2 \\ 3x_1 + 6x_2 + 9x_3 &= y_3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x_1} + 4x_2 \quad +7x_3 = y_1 \\ \quad - 3x_2 \quad -6x_3 = y_2 - 2y_1 \\ \quad - 6x_2 \quad -12x_3 = y_3 - 3y_1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x_1} + 4x_2 \quad +7x_3 = y_1 \\ \quad \boxed{-3x_2} \quad -6x_3 = y_2 - 2y_1 \\ \quad\quad 0 = y_3 - 3y_1 - 2(y_2 - 2y_1) = y_1 - 2y_2 + y_3 \end{cases}$$

On a donc $\overrightarrow{y} \in E$ ssi $y_1 - 2y_2 + y_3 = 0$.

> Il est facile de vérifier ces calculs en s'assurant que les vecteurs $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$ satisfont cette équation, puisqu'ils sont dans E par définition.

La conclusion est que E n'est pas tout $\mathbb{R}^3$. Par exemple $\overrightarrow{e_1} = (1,0,0) \notin E$. En fait, E est le plan d'équation $y_1 - 2y_2 + y_3 = 0$, et les vecteurs $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$ sont dans ce plan. On dit qu'ils sont **coplanaires**.

3 Bases et dimension d'un espace vectoriel

L'objectif du chapitre est de comprendre comment associer à tout sev E de $\mathbb{R}^n$ des systèmes de coordonnées. Cela est possible lorsqu'on dispose d'une **base** de E. Cette notion généralise celle de repère de $\mathbb{R}^3$, que vous avez sûrement déjà utilisé en physique notamment.

3.1 Familles libres, génératrices et bases

Définitions. On commence par quelques définitions abstraites mais fondamentales, à connaître parfaitement !

Définition 3.1. — Une famille (ou collection) $\mathcal{F} = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_p})$ de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est dite **liée** s'il existe des réels λ_1, λ_2, $\cdots$, λ_p **pas tous nuls** tels que

$$\lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + \lambda_p\overrightarrow{v_p} = \overrightarrow{0}.$$

On dit aussi que les vecteurs $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, $\cdots$, $\overrightarrow{v_p}$ sont **linéairement dépendants**.

— Dans le cas contraire, on dit que la famille $\mathcal{F}$ est **libre**.

Concrètement, dire qu'une famille $\mathcal{F} = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_p})$ est libre signifie que **SI** on a une combinaison linéaire nulle

$$\lambda_1 \overrightarrow{v_1} + \lambda_2 \overrightarrow{v_2} + \cdots + \lambda_p \overrightarrow{v_p} = \overrightarrow{0},$$

ALORS la **SEULE** possibilité est que **TOUS** les λ_i sont nuls.

Remarquez que l'on a **toujours**

$$0\,\overrightarrow{v_1} + 0\,\overrightarrow{v_2} + \cdots + 0\,\overrightarrow{v_p} = \overrightarrow{0}.$$

Cette équation là ne nous apprend rien sur la famille !

On a déjà rencontré la notion suivante.

Définition 3.2. On dit qu'une famille $\mathcal{F} = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_p})$ de vecteurs d'un sev E de $\mathbb{R}^n$ est **génératrice** de E si $E = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$, ou autrement dit, que tout vecteur de E est une combinaison linéaire d'éléments de $\mathcal{F}$.

La notion clé est celle de base.

Définition 3.3. On dit qu'une famille $\mathcal{F}$ d'un sev E est une **base** de E si $\mathcal{F}$ est libre et génératrice.

Base et coordonnées. À chaque base est associé un système de coordonnées.

Proposition 3.4. • *La famille $B = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_p})$ de E est une base de E si et seulement si tout vecteur $\overrightarrow{v}$ de E s'écrit **de manière unique** comme combinaison linéaire des $\overrightarrow{v_i}$, c'est-à-dire*

$$\forall \overrightarrow{v} \in E,\ \exists!\, \lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p \in \mathbb{R} \text{ tels que } \overrightarrow{v} = \lambda_1 \overrightarrow{v_1} + \lambda_2 \overrightarrow{v_2} + \cdots + \lambda_p \overrightarrow{v_p}.$$

• *Les nombres λ_1, λ_2, $\cdots$, λ_p s'appellent les **coordonnées** de $\overrightarrow{v}$ dans la base B. On notera cela*

$$\overrightarrow{v} = (\lambda_1, \lambda_2, \cdots, \lambda_p)_B,$$

avec le B en indice pour préciser la base de travail (s'il y a lieu).

Démonstration. • On voit que B est génératrice de E si et seulement si tout vecteur $\overrightarrow{v}$ s'écrit **au moins d'une manière** comme combinaison linéaire de vecteurs de B.

• Montrons que B est libre si et seulement si tout vecteur $\overrightarrow{v}$ s'écrit **au plus d'une manière** comme combinaison linéaire de vecteur de B. La conjonction des deux résultats donnera alors

$$\text{Base} = \text{libre et générateur} = \text{décomposition unique des vecteurs.}$$

Si il y a unicité, alors on voit en appliquant le principe à $\overrightarrow{0}$ que

$$\lambda_1 \overrightarrow{v_1} + \lambda_2 \overrightarrow{v_2} + \cdots + \lambda_p \overrightarrow{v_p} = \overrightarrow{0} = 0\, \overrightarrow{v_1} + 0\, \overrightarrow{v_2} + \cdots + 0\, \overrightarrow{v_p}$$

implique $\lambda_1 = \lambda_2 = \cdots = \lambda_p = 0$ et la famille B est libre.

• Inversement si pour un vecteur $\overrightarrow{v}$ on a deux écritures

$$\overrightarrow{v} = \lambda_1 \overrightarrow{v_1} + \lambda_2 \overrightarrow{v_2} + \cdots + \lambda_p \overrightarrow{v_p} = \lambda'_1 \overrightarrow{v_1} + \lambda'_2 \overrightarrow{v_2} + \cdots + \lambda'_p \overrightarrow{v_p},$$

alors par soustraction

$$(\lambda_1 - \lambda'_1)\overrightarrow{v_1} + (\lambda_2 - \lambda'_2)\overrightarrow{v_2} + \cdots + (\lambda_p - \lambda'_p)\overrightarrow{v_p} = \overrightarrow{0}$$

ce qui implique que

$$\lambda_1 = \lambda'_1,\ \lambda_2 = \lambda'_2,\ \cdots,\ \lambda_p = \lambda'_p$$

si la famille B est libre. □

3.2 Quelques exemples de bases

La base canonique de $\mathbb{R}^n$. Dans $\mathbb{R}^n$, on considère la famille $B = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_n})$ la famille de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ avec

$$\begin{cases} \overrightarrow{e_1} = (1, 0, 0, \cdots, 0) \\ \overrightarrow{e_2} = (0, 1, 0, \cdots, 0) \\ \quad \cdots \\ \overrightarrow{e_n} = (0, 0, 0, \cdots, 1) \end{cases}$$

Proposition 3.5. • *La famille $B = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_n})$ est une base de $\mathbb{R}^n$, appelée **la base canonique** de $\mathbb{R}^n$.*

• *Les coordonnées de $\overrightarrow{v} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ dans la base B sont simplement les composantes x_1, x_2, $\cdots$, x_n de $\overrightarrow{v}$ c'est-à-dire $\overrightarrow{v} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)_B$.*

Démonstration. On a déjà remarqué dans le §2.5 que la famille B est génératrice de $\mathbb{R}^n$ puisque tout $\overrightarrow{v} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ s'écrit

$$\overrightarrow{v} = (x_1, x_2, \cdots, x_n) = x_1 \overrightarrow{e_1} + x_2 \overrightarrow{e_2} + \cdots + x_n \overrightarrow{e_n}.$$

Cette formule montre aussi qu'il n'y a pas d'autre choix de combinaison linéaire possible pour un vecteur $\overrightarrow{v}$ donné. B est donc une base et les x_i sont les coordonnées de $\overrightarrow{v}$ dans cette base. □

Composantes et coordonnées.

> **Attention**, il faut pas confondre les **composantes** x_i d'un vecteur $\vec{v} = (x_1, x_2, \cdots, x_n)$ de $\mathbb{R}^n$, et ses **coordonnées** en général. Les deux notions sont différentes si on travaille dans une autre base que la base canonique.

Par exemple, considérons dans $\mathbb{R}^2$ les deux vecteurs $\vec{v_1} = (1,1)$ et $\vec{v_2} = (1,-1)$. Ces vecteurs forment une base de $\mathbb{R}^2$.

En effet, soit $\vec{v} = (x,y)$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^2$. On a

$$\vec{v} = \lambda_1 \vec{v_1} + \lambda_2 \vec{v_2} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = x \\ \lambda_1 - \lambda_2 = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 = \dfrac{x+y}{2} \\ \lambda_2 = \dfrac{x-y}{2} \end{cases}$$

Ainsi, tout vecteur s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire de $\vec{v_1}$ et $\vec{v_2}$, et $B = (\vec{v_1}, \vec{v_2})$ est une base de $\mathbb{R}^2$. De plus les coordonnées de $\vec{v} = (x,y)$ dans la base B sont les nombres

$$\lambda_1 = \frac{x+y}{2} \quad \text{et} \quad \lambda_2 = \frac{x-y}{2}\,.$$

Autrement dit, avec les notations de la proposition 3.5, on a

$$\vec{v} = (x,y) = \Big(\frac{x+y}{2}, \frac{x-y}{2}\Big)_B\,.$$

Bases de $\mathbb{R}^n$ et systèmes de Cramer. Nous verrons dans le chapitre suivant que toutes les bases de $\mathbb{R}^n$ ont n vecteurs. En attendant, il est facile de savoir si une famille donnée de n vecteurs $\mathcal{F} = (\vec{v_1}, \vec{v_2}, \cdots, \vec{v_n})$ de $\mathbb{R}^n$ est une base.

En effet, soit $\vec{v}$ un vecteur quelconque de $\mathbb{R}^n$. On sait [1] que le système à n équations et n inconnues

$$\lambda_1 \vec{v_1} + \lambda_2 \vec{v_2} + \cdots + \lambda_n \vec{v_n} = \vec{v}$$

possède une unique solution si et seulement si son rang $r = n$, c'est-à-dire si et seulement si toutes les inconnues d'un système échelonné équivalent sont principales (sont des pivots). On dit dans ce cas que c'est un système de Cramer.

Remarquez qu'il n'est pas nécessaire de résoudre le système général, mais seulement d'échelonner le système homogène associé pour connaître le rang. La résolution du système est par contre indispensable si l'on veut calculer les coordonnées λ_i de $\vec{v}$ dans la nouvelle base $\mathcal{F}$.

1. Voir fin de chapitre sur la méthode du pivot

Théorème 3.6. *Une famille $\mathcal{F} = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_n})$ de n vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est une base si et seulement si le système*

$$\lambda_1 \overrightarrow{v_1} + \lambda_2 \overrightarrow{v_2} + \cdots + \lambda_n \overrightarrow{v_n} = \overrightarrow{0}$$

est de Cramer, c'est-à-dire de rang maximal $r = n$.

Exemple. Pour quelles valeurs du paramètre a les vecteurs

$$\overrightarrow{v_1} = (1, 2, 1)\,,\ \overrightarrow{v_2} = (1, 4, a)\,,\ \overrightarrow{v_3} = (-1, 0, -2)$$

forment-ils une base de $\mathbb{R}^3$?

On échelonne le système $\lambda_1 \overrightarrow{v_1} + \lambda_2 \overrightarrow{v_2} + \lambda_3 \overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_1 + 4\lambda_2 = 0 \\ \lambda_1 + a\lambda_2 - 2\lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{\lambda_1} + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ 2\lambda_2 + 2\lambda_3 = 0 \\ (a-1)\lambda_2 - \lambda_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{\lambda_1} + \lambda_2 - \lambda_3 = 0 \\ \boxed{\lambda_2} + \lambda_3 = 0 \\ -a\lambda_3 = 0 \end{cases}$$

Le système est de Cramer et $\mathcal{F} = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \overrightarrow{v_3})$ est une base de $\mathbb{R}^3$ ssi $a \neq 0$. On remarque aussi que pour $a = 0$, le rang est 2, et $\lambda_3 = 1$, $\lambda_2 = -1$ et $\lambda_1 = 2$ est solution, c'est-à-dire

$$2\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{v_3} = \overrightarrow{0}\,.$$

La famille est liée dans ce cas.

Famille libre de $\mathbb{R}^n$.

Toute famille libre $\mathcal{F} = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_p})$ de $\mathbb{R}^n$ est une base de $E = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$. En effet $\mathcal{F}$ est libre, et par définition, génératrice de E.

• Par exemple, tout vecteur $\overrightarrow{v}$ non nul de $\mathbb{R}^n$ est une base de la droite $D = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{v})$ engendrée par $\overrightarrow{v}$.

• De la même façon, tout couple de vecteurs **non colinéaires** $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$ de $\mathbb{R}^n$ est une base du plan $P = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$ engendré par ces vecteurs.

Notez que les droites et plans ne passent en général pas par les axes de $\mathbb{R}^3$, et qu'il est alors nécessaire de travailler avec des bases qui ne soient pas constituées des vecteurs $\overrightarrow{e_i}$ de la base canonique.

On traite l'exemple du plan P engendré par $\overrightarrow{v_1} = (1, 1, 1)$ et $\overrightarrow{v_2} = (1, 2, 3)$. On cherche les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{v} = (x, y, z)$ de P dans la base $B = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2})$. On a

$$\overrightarrow{v} \in P \Leftrightarrow \exists \lambda_1,\ \lambda_2 \text{ tels que } \overrightarrow{v} = \lambda_1 \overrightarrow{v_1} + \lambda_2 \overrightarrow{v_2} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 = x \\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = y \\ \lambda_1 + 3\lambda_2 = z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{\lambda_1} + \lambda_2 = x \\ \lambda_2 = y - x \\ 2\lambda_2 = z - 2x \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{\lambda_1} + \lambda_2 = x \\ \boxed{\lambda_2} = y - x \\ 0 = z - 2x - 2(y - x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{\lambda_1} = 2x - y \\ \boxed{\lambda_2} = y - x \\ 0 = x - 2y + z \end{cases}$$

La conclusion est que les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{v} = (x, y, z)$ de P dans la base B sont $(\lambda_1, \lambda_2) = (2x - y, y - x)$, autrement dit

$$\overrightarrow{v} = (2x - y, y - x)_B.$$

L'équation de compatibilité $x - 2y + z = 0$ est l'équation cartésienne du plan (cf. corollaire 2.9).

Si $\overrightarrow{v}$ est dans P, il est bien caractérisé de manière optimale par deux coordonnées et non trois. Ce principe est encore plus utile en grande dimension. Un vecteur d'un plan de $\mathbb{R}^{100}$ ne dépend que deux paramètres, et non de cent composantes !

3.3 Existence et construction de bases

Nous voyons maintenant deux techniques générales de construction de bases. Elles sont très utiles et à connaître parfaitement !

Extraction d'une base d'une famille génératrice. La première méthode concerne l'extraction d'une base d'un sev de $\mathbb{R}^n$ engendré par p vecteurs.

Théorème 3.7. *Soit $E = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_p})$ un sev de $\mathbb{R}^n$ engendré par p vecteurs.*

On considère le système homogène (S)

$$x_1 \overrightarrow{v_1} + x_2 \overrightarrow{v_2} + \cdots + x_p \overrightarrow{v_p} = \overrightarrow{0},$$

et on note $I = (i_1, i_2, \cdots, i_r)$ les indices des inconnues principales d'un système échelonné équivalent et r son rang.

*Alors la famille B des r vecteurs $\overrightarrow{v_{i_1}}$, $\overrightarrow{v_{i_2}}$, $\cdots$, $\overrightarrow{v_{i_r}}$ correspondant aux inconnues **principales** est une base de E.*

Démonstration. Il faut montrer que la famille B est libre et génératrice de E.

- B est-elle génératrice ?

On pose $F = \mathrm{Vect}(B)$. On a $B \subset \mathcal{F} = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_p})$ d'où $F = \mathrm{Vect}(B) \subset E = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$. Nous allons voir que les vecteurs « manquants » $\overrightarrow{v_j}$ correspondant aux inconnues *non principales* sont aussi dans F, d'où l'on tire l'inclusion opposée.

Si x_j est une inconnue non principale, on sait par le pivot de Gauss-Jordan qu'il existe une (unique) solution de (S) avec $x_j = 1$ et les autres inconnues non principales nulles. Cela s'écrit

$$\sum_{i \in I} x_i \overrightarrow{v_i} + \overrightarrow{v_j} = \overrightarrow{0} \Longleftrightarrow \overrightarrow{v_j} = -\sum_{i \in I} x_i \overrightarrow{v_i} \in F = \mathrm{Vect}(B)\,. \tag{1}$$

- B est-elle libre ?

Supposons que l'on ait une relation de dépendance linéaire entre les vecteurs de B, c'est-à-dire que

$$\sum_{i \in I} x_i \overrightarrow{v_i} = \overrightarrow{0}.$$

Alors cela s'interprète comme une solution du système (S) dont les inconnues non principales sont toutes nulles. D'après le pivot de Gauss-Jordan, la donnée des inconnues non principales détermine la solution. Comme la solution nulle convient, c'est la seule possible. On a donc $x_i = 0$ et la famille B est libre. □

> En résumé, la technique nous montre que de toute famille **génératrice**, on peut **extraire** une base. D'après (1), les vecteurs « non principaux » empêchent la famille d'être libre. Ils sont combinaisons linéaires des vecteurs « principaux » et on peut les enlever de la famille.

Notez aussi que pour extraire une base d'un système générateur, on n'a pas besoin de **résoudre** le système (S)

$$x_1\overrightarrow{v_1} + x_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + x_p\overrightarrow{v_p} = \overrightarrow{0}\,.$$

Il suffit de **l'échelonner** pour connaître les inconnues principales et les vecteurs que l'on garde.

Base d'un sev défini par un système d'équations. Soit $E = \mathrm{Sol}(S)$ un sev de $\mathbb{R}^p$ défini par un système linéaire homogène (S) à p inconnues et n équations.

On note r le rang d'un système échelonné équivalent, $I = (i_1, i_2, \cdots, i_r)$ ses inconnues principales et $J = {}^cI = (j_1, j_2, \cdots, j_{p-r})$ ses inconnues non principales. Si $r = p$, il n'y a pas d'inconnues non principales, et E est réduit au vecteur nul. Sinon, nous allons construire une base de E.

Théorème 3.8. *Si $E = \mathrm{Sol}(S)$ n'est pas nul, alors une base de E est donnée par $p - r$ vecteurs*

$$B = (\overrightarrow{v_{j_1}}, \overrightarrow{v_{j_2}}, \cdots, \overrightarrow{v_{j_r}}),$$

un par inconnue non principale, où chaque $\overrightarrow{v_{j_k}}$ est l'unique solution de (S) correspondant à la donnée des inconnues non principales

$$x_{j_k} = 1 \quad \text{et} \quad x_{j_l} = 0 \textit{ pour } l \neq k.$$

Exemple. Pour comprendre d'où cela vient nous traitons un exemple pratique. Soit

$$E = \{\vec{v} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y - z + t = 0\,,\ 2x + y + 2z - t = 0\}.$$

On échelonne et résout le système. On a $\vec{v} = (x, y, z, t) \in E \Leftrightarrow$

$$\begin{cases} x + y - z + t = 0 \\ 2x + y + 2z - t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x} + y - z + t = 0 \\ \boxed{-y} + 4z - 3t = 0 \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} x = -y + z - t = -4z + 3t + z - t = -3z + 2t \\ y = 4z - 3t \end{cases}$$

On a donc que $\vec{v} \in E$ est de la forme

$$\vec{v} = (-3z + 2t, 4z - 3t, z, t) = z(-3, 4, \boxed{1, 0}) + t(2, -3, \boxed{0, 1}).$$

Autrement dit E est le plan engendré par les deux vecteurs

$$\overrightarrow{v_1} = (-3, 4, 1, 0) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v_2} = (2, -3, 0, 1)\,,$$

où $\overrightarrow{v_1}$ est la solution de (S) correspondant aux inconnues non principales $z = 1$ et $t = 0$, tandis que $\overrightarrow{v_2}$ correspond à $z = 0$ et $t = 1$. Notez que ces vecteurs sont non colinéaires, en particulier car les deux dernières composantes encadrées (des inconnues non principales) sont celles de la base canonique de $\mathbb{R}^2$.

Démonstration du théorème 3.8. Par linéarité des équations du système, le vecteur

$$\vec{v} = \sum_{j \in J} x_j \overrightarrow{v_j}$$

est une solution de (S) dont les inconnues non principales sont les x_j. D'après le théorème de Gauss-Jordan, c'est l'unique solution correspondant à ces valeurs. On a donc que tout vecteur de $E = \mathrm{Sol}(S)$ est de cette forme, et ainsi que la famille $B = (\overrightarrow{v_j},\ j \in J)$ est génératrice de E.

Par ailleurs, la famille B est libre car les composantes « non principales » des $\overrightarrow{v_j}$ décrivent par définition la base canonique des de $\mathbb{R}^{p-r}$. □

4 Dimension d'un espace vectoriel

À l'aide de la notion de base, nous allons pouvoir définir ce qu'est la dimension d'un sev de $\mathbb{R}^n$.

4.1 Définition

Théorème 4.1. *Soit E un espace vectoriel non nul engendré par n vecteurs. Alors toutes les bases de E ont le même nombre de vecteurs.*

Ce nombre entier s'appelle la **dimension** *de E et se note $\dim E$. On a de plus ici $\dim E \leq n$.*

Par convention utile, on définit $\dim\{\overrightarrow{0}\} = 0$. En fait l'espace vectoriel $\{\overrightarrow{0}\}$ ne possède aucune base car il n'y a pas de famille libre dans cet espace ($1.\overrightarrow{0} = \overrightarrow{0} \Rightarrow \{\overrightarrow{0}\}$ est liée).

Le nombre d'éléments d'un ensemble fini B s'appelle son **cardinal**, et se note $\mathrm{Card}(B)$. On a donc ici

$$\mathrm{Card}(B) = \dim E \text{ pour toute base de } E.$$

Le théorème sur la dimension se déduit d'un lemme très utile par ailleurs.

Lemme 4.2. *Soit E un espace vectoriel engendré par n vecteurs. Alors toute famille libre de E n'a pas plus de n vecteurs, c'est-à-dire*

$$\mathcal{F} \text{ libre} \Rightarrow \mathrm{Card}(\mathcal{F}) \leq n$$

Démonstration. Par le théorème 3.7, on extrait une base B de la famille génératrice de E. On a $\mathrm{Card}(B) = k \leq n$. Soit $\mathcal{F} = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_p})$ une famille de E. Alors, dans la base B, l'équation

$$\lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + \lambda_p\overrightarrow{v_p} = \overrightarrow{0}$$

est un système linéaire homogène à k équations et p inconnues. Il possède une infinité de solutions si $p > k$ car il y a alors $p - k$ inconnues non principales. Ainsi $\mathcal{F}$ est liée si $\mathrm{Card}(\mathcal{F}) > k$, et si $\mathcal{F}$ est libre, alors $\mathrm{Card}(\mathcal{F}) \leq k \leq n$. □

Démonstration du théorème 4.1 à l'aide du lemme. L'espace vectoriel E, engendré par n vecteurs, possède des bases de cardinal $\leq n$ d'après le théorème d'extraction 3.7.

Soient $B = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_p})$ et $B' = (\overrightarrow{v_1'}, \overrightarrow{v_2'}, \cdots, \overrightarrow{v_q'})$ deux bases de E. Comme B' est libre dans E engendré par la base B, on a d'après le lemme

$$q = \mathrm{Card}(B') \leq \mathrm{Card}(B) = p\,.$$

Par symétrie des rôles, on a aussi B libre dans E engendré par B' et donc $p \leq q$ et finalement $p = q$. □

4.2 Exemples importants

• On a $\dim \mathbb{R}^n = n$ puisque la base canonique $B = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_n})$ à n vecteurs. **Toutes** les bases de $\mathbb{R}^n$ ont donc n vecteurs.

• Les espaces vectoriels de dimension 1 sont les droites vectorielles. Les espaces vectoriels de dimension 2 sont les plans vectoriels.

Intuitivement, on peut dire que la dimension d'un espace vectoriel E est le nombre de « paramètres libres » dont dépend un vecteur de E, à ne pas confondre avec le nombre éventuellement beaucoup plus grand de composantes du vecteur si $E \subset \mathbb{R}^n$. Par exemple, la détermination d'un vecteur d'un plan P dépend de deux nombres, ses coordonnées dans une base de P, que P soit plongé dans $\mathbb{R}^3$, $\mathbb{R}^4$ ou $\mathbb{R}^{100}$.

• D'après le théorème 3.7, on a le résultat général suivant :

Proposition 4.3. *La dimension d'un sev E de $\mathbb{R}^n$ engendré par p vecteurs $\overrightarrow{v_1}$, $\overrightarrow{v_2}$, $\cdots$, $\overrightarrow{v_p}$ est le rang, c'est-à-dire le nombre d'**inconnues principales** d'un système échelonné équivalent au système homogène*

$$(S) : \quad x_1\overrightarrow{v_1} + x_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + x_p\overrightarrow{v_p} = \overrightarrow{0}.$$

Autrement dit,

$$\dim \mathrm{Vect}(\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_p}) = \mathrm{rang}(S).$$

Une notion équivalent est celle de rang d'une famille de vecteurs.

Définition 4.4. On appelle **rang d'une famille de vecteurs** $\mathcal{F} = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_p})$, la dimension de l'espace qu'elle engendre :

$$\mathrm{rang}(\mathcal{F}) = \dim \mathrm{Vect}(\mathcal{F}) = \mathrm{rang}(S)$$

où (S) est le système $x_1\overrightarrow{v_1} + x_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + x_p\overrightarrow{v_p} = \overrightarrow{0}$.

• La dimension d'un sev $E = \mathrm{Sol}(S)$ de $\mathbb{R}^p$ défini par un système d'équation cartésiennes homogènes (S) a p inconnues se calcule aussi facilement en échelonnant (S) d'après le théorème 3.8.

Proposition 4.5. *La dimension de* $E = \mathrm{Sol}(S)$ *est le nombre d'inconnues* ***non principales*** *d'un système échelonné équivalent à* (S).

Il suffit donc d'échelonner (S), sans le résoudre, pour connaître la dimension de $E = \mathrm{Sol}(S)$. Par exemple la dimension de $E = \{\overrightarrow{v} = (x, y, z, t, u) \in \mathbb{R}^5,\ x + 2y - 3z + 4t = 0\}$ est 4 (x inconnue principale, y, z, t, u non principales).

Attention, de ne pas confondre ce résultat avec le précédent sur la dimension d'un sev engendré par une famille de vecteurs. La dimension est donnée ici par le nombre **d'inconnues non principales**. Ce sont en effet elles qui paramètrent les solutions, et non les inconnues principales.

Une conséquence intéressante de la proposition précédente est la suivante.

Corollaire 4.6. *Un système* (S) *de* n *équations homogènes à* p *inconnues définit un sous-espace vectoriel* $E = \mathrm{Sol}(S)$ *de* $\mathbb{R}^p$ *de dimension* $\geq p - n$.

Démonstration. En effet, d'après la proposition 4.5, on a $\dim E$ = nombre d'inconnues non-principales. Or, il y a au plus un pivot par équation, et donc au plus n inconnues principales. Il reste donc au moins $p - n$ inconnues non-principales. □

En particulier, dans $\mathbb{R}^n$ il faut (au moins) $n-1$ équations pour définir une droite vectorielle, et $n - 2$ pour définir un plan !

4.3 Utilisation de la dimension

La notion de dimension est un outil de raisonnement efficace dans les problèmes de familles, bases et comparaisons de sev.

Cardinal des familles et dimension.

Proposition 4.7. *Soit* E *un espace vectoriel de dimension* n *et* $\mathcal{F}$ *une famille de vecteurs de* E. *Alors*

a) $\mathrm{Card}(\mathcal{F}) \leq n$ *si* $\mathcal{F}$ *est libre.*

b) $\mathrm{Card}(\mathcal{F}) \geq n$ *si* $\mathcal{F}$ *est génératrice.*

c) Si $\mathcal{F}$ *est génératrice et de cardinal* n, *alors c'est une base de* E.

d) Si $\mathcal{F}$ *est libre et de cardinal* n, *alors c'est une base de* E.

Démonstration. a) est le lemme.

b) par extraction d'une base de cardinal $n = \dim E$ de la famille génératrice.

c) de nouveau par extraction de base. Si $\mathcal{F}$ est génératrice, on peut en extraire une sous-famille $\mathcal{F}'$ qui est une base de cardinal $\dim E$. Si on a de plus $\mathrm{Card}(\mathcal{F}) = \dim E = \mathrm{Card}(\mathcal{F}')$ alors $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$ est une base de E.

d) Si $\mathcal{F} = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_n})$ est une famille de cardinal $n = \dim E$ vecteurs, alors pour tout $\overrightarrow{v} \in E$, l'équation

$$(S) : \quad \lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + \lambda_n\overrightarrow{v_n} = \overrightarrow{v}$$

est un système linéaire à n équations et n inconnues. Si de plus $\mathcal{F}$ est libre, alors le rang de (S) est n, c'est-à-dire qu'il n'y a pas d'inconnues non principales. En effet, sinon, le système homogène associé aurait des solutions non nulles et $\mathcal{F}$ serait liée. (S) est donc un système de Cramer et possède une solution unique, ce qui montre que $\mathcal{F}$ est une base.

□

Remarques 4.8. • Les énoncés a) et b) s'utilisent souvent en contraposée, c'est-à-dire qu'une famille de cardinal $> \dim E$ est automatiquement liée, et de cardinal $< \dim E$ ne peut être génératrice.

• Les résultats c) et d) permettent de réduire les calculs. Pour montrer qu'une famille $\mathcal{F}$ est une base, il suffit de vérifier que $\mathrm{Card}(\mathcal{F}) = \dim E$ et que $\mathcal{F}$ est libre **ou** génératrice !

Croissance de la dimension.

Proposition 4.9. *Soient E un sev de $\mathbb{R}^n$ et F une sev de E. Alors on a*

i) $\dim F \leq \dim E$.

ii) Si de plus $\dim F = \dim E$ *alors* $F = E$.

Démonstration. i) Si B_F est une base de F alors B est une famille libre de vecteurs de E, et donc par le lemme (ou la proposition 4.7 a) on a

$$\mathrm{Card}(B_F) = \dim F \leq \dim E\,.$$

ii) Si on a de plus $\dim F = \dim E$ alors B_F est une famille libre de E de cardinal $\dim E$. C'est donc une base de E d'après le d) de la proposition 4.7. On a donc

$$F = \mathrm{Vect}(B_F) = E.$$

□

Cette proposition est utile pour montrer que deux espaces E et F sont égaux. Il suffit de vérifier que $\dim E = \dim F$ et **qu'une** des inclusions $E \subset F$ **ou** $F \subset E$ est satisfaite.

Rang et cardinal. On peut aussi traduire ces propriétés en fonction du rang d'une famille $\mathcal{F}$ de vecteurs. On rappelle que par définition

$$\operatorname{rang}(\mathcal{F}) = \dim \operatorname{Vect}(\mathcal{F})\,,$$

à ne pas confondre avec le cardinal de $\mathcal{F}$ qui est simplement le nombre d'éléments de $\mathcal{F}$. D'après la proposition 4.5, le rang d'une famille de vecteurs $\mathcal{F} = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_p})$ est aussi le rang du système $\lambda_1 \overrightarrow{v_1} + \lambda_2 \overrightarrow{v_2} + \cdots + : \lambda_p \overrightarrow{v_p} = \overrightarrow{0}$ associé, c'est-à-dire le nombre d'inconnues principales du système.

Proposition 4.10. *Soit $\mathcal{F}$ une famille de p vecteurs de $\mathbb{R}^n$.*

i) On a toujours $\operatorname{rang}(\mathcal{F}) \leq p$ *et* n.

ii) De plus $\operatorname{rang}(\mathcal{F}) = p$ *si et seulement si $\mathcal{F}$ est libre et* $\operatorname{rang}(\mathcal{F}) = n$ *ssi $\mathcal{F}$ est génératrice de $\mathbb{R}^n$.*

Démonstration. Soit $E = \operatorname{Vect}(\mathcal{F})$. Comme $E \subset \mathbb{R}^n$ on a bien $\operatorname{rang}(\mathcal{F}) = \dim E \leq \dim \mathbb{R}^n = n$ avec égalité ssi $\dim E = n$ auquel cas $E = \mathbb{R}^n$ d'après la proposition 4.9 ii).

Par ailleurs, on a toujours que $\operatorname{rang}(\mathcal{F}) = \dim E$ est le cardinal d'une base de E extraite de $\mathcal{F}$. Par conséquent $\operatorname{rang}(\mathcal{F}) \leq \operatorname{Card}(\mathcal{F})$ avec égalité ssi la famille $\mathcal{F}$ est déjà libre. □

5 Somme et espaces supplémentaires

Nous finissons notre étude générale des propriétés des sous-espaces vectoriels.

5.1 Intersection et somme de sous-espaces vectoriels

Proposition 5.1. *L'intersection de sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$ est toujours un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.*

C'est clair en revenant à la définition générale 2.2 des sous-espaces vectoriels. Ainsi les intersections de plans vectoriels sont toujours, soit des plans, soit des droites, ou $\{\overrightarrow{0}\}$.

De la même façon, on peut voir l'espace vectoriel des solutions d'un système homogène à n équations comme l'intersection de n sev définis par une seule équation. Chacune de ses équations, du type

$$a_1 x_1 + a_2 x_2 + \cdots + a_n x_n = 0\,,$$

définit un sous-espace de dimension $n-1$ dans $\mathbb{R}^n$ si au moins un des coefficients a_i n'est pas nul. Un tel sev s'appelle un **hyperplan** de $\mathbb{R}^n$.

Union et somme. Contrairement à l'intersection, l'union de deux sev n'est presque jamais un sev. Par exemple, l'union de deux droites vectorielles distinctes du plan n'est pas un sev comme on le voit facilement.

Pour remédier à ce problème, on introduit la notion de somme de sev.

Définition 5.2. Soit E et F deux sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^n$. Alors, on pose

$$E + F = \{\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} \mid \overrightarrow{v} \in E \text{ et } \overrightarrow{w} \in F\}.$$

On voit facilement les propriétés suivantes.

Proposition 5.3. *a) $E + F$ est un sous-espace vectoriel contenant E et F.*
b) $E + F$ est le plus petit sous-espace vectoriel contenant E et F.

Par exemple, dans $\mathbb{R}^2$, la somme de deux droites distinctes est $\mathbb{R}^2$ tout entier, tandis que dans $\mathbb{R}^3$ cela donne le plan engendré par les deux directions des droites.

Dans $\mathbb{R}^3$, nous allons montrer que la somme d'un plan P et d'une droite D non incluse dans P est $\mathbb{R}^3$ tout entier. Pour étudier cela en général il nous faut parler d'espaces supplémentaires, et avant, de base incomplète.

5.2 Le théorème de la base incomplète

Il arrive que dans $\mathbb{R}^n$ on dispose d'une première base B_E provenant d'un sous-espace vectoriel E donné, et que l'on souhaite utiliser ces vecteurs comme faisant partie d'une base de $\mathbb{R}^n$ tout entier. Il faut pour cela **compléter** B_E avec des « directions manquantes ».

Théorème 5.4 (Théorème de la base incomplète)**.**

Soit $\mathcal{G} = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_p})$ *une famille génératrice de* $\mathbb{R}^n$*, et* $\mathcal{F} = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \cdots, \overrightarrow{u_q})$ *une famille libre de* $\mathbb{R}^n$*.*

Alors, on peut compléter la ***famille libre*** $\mathcal{F}$ *à l'aide de certains vecteurs de la famille* ***génératrice*** $\mathcal{G}$ *pour obtenir une base*

$$B = \mathcal{F} \cup (\overrightarrow{v_{i_1}}, \overrightarrow{v_{i_2}}, \cdots, \overrightarrow{v_{i_{n-q}}}) \text{ de } \mathbb{R}^n.$$

Démonstration. La démonstration donne une méthode concrète pour le faire. On considère la famille génératrice $\mathcal{G}' = \mathcal{F} \cup \mathcal{G}$ en mettant les vecteurs de $\mathcal{F}$ **en début de liste**.

On sait par le théorème 3.7 que l'on peut extraire de $\mathcal{G}'$ une base de $\mathbb{R}^n$. De façon plus précise, on garde les vecteurs correspondant aux inconnues principales d'un système échelonné équivalent au système

$$(S): \quad x_1\overrightarrow{u_1} + x_2\overrightarrow{u_2} + \cdots + x_q\overrightarrow{u_q} + y_1\overrightarrow{v_1} + y_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + y_p\overrightarrow{v_p} = \overrightarrow{0}.$$

Si on procède par la méthode du pivot, sans changer l'ordre des colonnes, alors toutes les inconnues x_1, x_2, $\cdots$ x_q seront principales. En effet, le sous-système

$$x_1\overrightarrow{u_1} + x_2\overrightarrow{u_2} + \cdots + x_q\overrightarrow{u_q} = \overrightarrow{0}$$

est de rang maximal q car la famille $\mathcal{F}$ est libre. □

Dans la pratique, on peut prendre la base canonique de $\mathbb{R}^n$ comme famille génératrice $\mathcal{G}$. On peut ainsi compléter une famille libre à l'aide de certaines directions d'axe dans $\mathbb{R}^n$. Par exemple dans $\mathbb{R}^3$, on peut compléter deux vecteurs non colinéaires $\overrightarrow{u}$ et $\overrightarrow{v}$ par un des trois vecteurs $\overrightarrow{e_1} = (1,0,0)$, $\overrightarrow{e_2} = (0,1,0)$ ou $\overrightarrow{e_3} = (0,0,1)$. Il suffit de prendre un axe qui n'est pas inclus dans le plan $P = \text{Vect}(\overrightarrow{u}, \overrightarrow{v})$.

Il existe un second algorithme pour compléter $\mathcal{F}$. On peut rajouter un à un les vecteurs de $\mathcal{G}$ en gardant une famille libre, jusqu'à obtenir une base de $\mathbb{R}^n$. Cela est possible par la propriété suivante, utile en général.

Proposition 5.5. *Soit* $\mathcal{F}$ *une famille libre de* $\mathbb{R}^n$*. Alors la famille* $\mathcal{F}' = \mathcal{F} \cup \{\overrightarrow{v}\}$ *est encore libre si et seulement si* $\overrightarrow{v} \notin \text{Vect}(\mathcal{F})$*.*

Démonstration. On pose $\mathcal{F} = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_p})$. Si $\overrightarrow{v} \in \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ alors, il existe λ_1, λ_2, $\cdots$, λ_p tels que

$$\overrightarrow{v} = \lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + \lambda_p\overrightarrow{v_p} \Leftrightarrow \lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + \lambda_p\overrightarrow{v_p} - \overrightarrow{v} = \overrightarrow{0},$$

et la famille $\mathcal{F} \cup \{\overrightarrow{v}\}$ est liée.

Inversement, si $\mathcal{F} \cup \{\overrightarrow{v}\}$ est liée, alors il existe λ, λ_1, λ_2, $\cdots$, λ_p non tous nuls tels que

$$\lambda\overrightarrow{v} + \lambda_1\overrightarrow{v_1} + \lambda_2\overrightarrow{v_2} + \cdots + \lambda_p\overrightarrow{v_p} = \overrightarrow{0}.$$

On ne peut pas avoir $\lambda = 0$ car sinon la famille $\mathcal{F}$ serait liée. On a donc $\lambda \neq 0$ et

$$\overrightarrow{v} = -\frac{\lambda_1}{\lambda}\overrightarrow{v_1} - \frac{\lambda_2}{\lambda}\overrightarrow{v_2} + \cdots - \frac{\lambda_p}{\lambda}\overrightarrow{v_p} \in \mathrm{Vect}(\mathcal{F}).$$

□

Le second algorithme pour compléter une famille libre en une base est le suivant :

- On part de $\mathcal{F} = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \cdots, \overrightarrow{u_q})$ libre et $\mathcal{G} = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_p})$ génératrice de $\mathbb{R}^n$.
- Si $\overrightarrow{v_1} \notin \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$, on le rajoute à $\mathcal{F}$ qui reste libre, sinon, on garde $\mathcal{F}$.
- Dans les deux cas, on a une nouvelle famille libre $\mathcal{F}' \supset \mathcal{F}$ telle que $\overrightarrow{v_1} \in \mathrm{Vect}(\mathcal{F}')$.
- On continue avec $\overrightarrow{v_2}$, etc.
- À la fin, en fait quand la famille complétée est de cardinal $n = \dim \mathbb{R}^n$, on a une famille libre qui engendre tout $\mathcal{G} = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_p})$, et donc tout $\mathbb{R}^n$.

Existence de base en général. La proposition précédente permet aussi de montrer que tout sev non nul de $\mathbb{R}^n$ possède une base. Cela n'a pas encore été fait dans cette généralité, mais « seulement » pour les sev définis par un système d'équations ou par système générateur.

Cela suffit largement pour la pratique mais voici le raisonnement, pour la beauté du geste, mais aussi parce qu'il illustre une autre méthode de construction de base, par **complétion** d'une famille libre.

Théorème 5.6. *Tout sous-espace vectoriel non nul de $\mathbb{R}^n$ possède une base.*

Démonstration. Comme E n'est pas nul, il possède au moins une famille libre, par exemple un vecteur non nul.

De plus, par le lemme 4.2, toutes les familles libres de $E \subset \mathbb{R}^n$ sont de cardinal borné par $n = \dim E$. Soit alors $\mathcal{F}$ une famille libre de E **de cardinal maximal** ($\leq n$).

On montre que $\mathcal{F}$ est génératrice de E, et est donc une base de E. En effet, soit $\overrightarrow{v} \in E$ quelconque. D'après la proposition 5.5, on a $\overrightarrow{v} \in \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ car sinon $\mathcal{F} \cup \{\overrightarrow{v}\}$ resterait libre. Mais cela n'est pas possible car son cardinal serait plus grand que le cardinal maximal possible des familles libres de E.

□

5.3 Somme directe et espaces supplémentaires

Définitions. On revient sur la notion de somme $E+F$ de deux sev de $\mathbb{R}^n$:

$$E+F=\{\overrightarrow{u}=\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}\,,\ \overrightarrow{v}\in E \text{ et } \overrightarrow{w}\in F\}.$$

$E+F$ est donc l'ensemble des vecteurs de $\mathbb{R}^n$ qui se décomposent en la somme d'un vecteur de E et d'un vecteur de F. On peut aller plus loin en demandant que cette décomposition soit unique.

Définition 5.7. • On dit que deux sous-espaces vectoriels E et F de $\mathbb{R}^n$ sont en **somme directe** si tout vecteur de $\overrightarrow{v}\in\mathbb{R}^n$ se décompose **de manière unique** sous la forme

$$\overrightarrow{u}=\overrightarrow{v}+\overrightarrow{w}\,,\ \text{avec } \overrightarrow{v}\in E \text{ et } \overrightarrow{w}\in F.$$

• On écrit dans ce cas $\mathbb{R}^n=E\oplus F$, et on dit que F est un **supplémentaire** de E dans $\mathbb{R}^n$.

Attention de ne pas confondre supplémentaire et complémentaire ! En effet, le complémentaire ${}^cE$ d'un sev de $\mathbb{R}^n$ n'est **jamais** un sev de $\mathbb{R}^n$, car il ne contient pas $\overrightarrow{0}\,(\in E)$. Il n'est donc d'aucune utilité en algèbre linéaire.

Comme premier exemple dans $\mathbb{R}^2$, deux droites vectorielles distinctes sont supplémentaires.

Si $D_1=\mathrm{Vect}(\overrightarrow{v_1})$, $D_2=\mathrm{Vect}(\overrightarrow{v_2})$ et $\overrightarrow{v}\in\mathbb{R}^2$, alors on a de manière unique

$$\overrightarrow{v}=\lambda_1\overrightarrow{v_1}+\lambda_2\overrightarrow{v_2}$$

avec λ_1 et λ_2 coordonnées de $\overrightarrow{v}$ dans la base $(\overrightarrow{v_1},\overrightarrow{v_2})$ de $\mathbb{R}^2$ (famille libre à deux vecteurs).

La notion de somme directe est clairement plus forte que celle de somme simple. La différence se voit dans l'intersection de E et F.

Proposition 5.8. *On a* $\mathbb{R}^n=E\oplus F \Longleftrightarrow \mathbb{R}^n=E+F$ ***et*** $E\cap F=\{\overrightarrow{0}\}$.

Démonstration. En fait, on a par définition $\mathbb{R}^n=E+F\Leftrightarrow$ la décomposition de $\overrightarrow{v}$ existe, et on montre que $E\cap F=\{\overrightarrow{0}\}\Leftrightarrow$ il existe au plus une telle décomposition.

• En effet, soit $\overrightarrow{u}\in E\cap F$. Alors on peut écrire

$$\overrightarrow{u}=\overrightarrow{u}+\overrightarrow{0}=\overrightarrow{0}+\overrightarrow{u}\in E+F\,,$$

et donc $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ si il y a au plus une décomposition de $\overrightarrow{u}$.

• Inversement, on suppose que $E \cap F = \{\overrightarrow{0}\}$ et on suppose que

$$\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{w_1} = \overrightarrow{v_2} + \overrightarrow{w_2} \in E + F.$$

On a alors

$$\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{w_2} - \overrightarrow{w_1} \in E \cap F$$

et donc $\overrightarrow{v_1} - \overrightarrow{v_2} = \{\overrightarrow{0}\} = \overrightarrow{w_2} - \overrightarrow{w_1}$ si $E \cap F = \{\overrightarrow{0}\}$. □

Existence de supplémentaire.

Théorème 5.9. *Tout sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$ possède au moins un supplémentaire dans $\mathbb{R}^n$.*

Démonstration. • Si $E = \{\overrightarrow{0}\}$, un supplémentaire est $F = \mathbb{R}^n$, et inversement. Sinon, soit $B_E = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_p})$ une base de E et $B = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_n})$ une base de $\mathbb{R}^n$. D'après le théorème de la base incomplète, on peut compléter la famille libre B_E en une base $B' = B_E \cup \mathcal{F}$ de $\mathbb{R}^n$ en lui rajoutant certains vecteurs $\mathcal{F} = (\overrightarrow{e_i},\ i \in I \subset [1, n])$ de B.

On pose $F = \mathrm{Vect}(\mathcal{F})$ (l'espace vectoriel engendré par les « directions manquantes »), et on montre que F est un supplémentaire de E.

• Comme $B' = B_E \cup \mathcal{F}$ est une base de $\mathbb{R}^n$, tout vecteur $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^n$ s'écrit

$$\overrightarrow{u} = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \overrightarrow{v_j} + \sum_{i \in I} \mu_i \overrightarrow{e_i} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$$

avec $\overrightarrow{v} = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \overrightarrow{v_j} \in E$ et $\overrightarrow{w} = \sum_{i \in I} \mu_i \overrightarrow{e_i} \in \mathrm{Vect}(\mathcal{F}) = F$. On a donc $\mathbb{R}^n = E + F$.

• Si $\overrightarrow{u} \in E \cap F$, alors $\overrightarrow{u}$ s'écrit

$$\overrightarrow{u} = \sum_{j=1}^{p} \lambda_j \overrightarrow{v_j} \text{ et } \overrightarrow{u} = \sum_{i \in I} \mu_i \overrightarrow{e_i}.$$

On a alors

$$\sum_{j=1}^{p} \lambda_j \overrightarrow{v_j} - \sum_{i \in I} \mu_i \overrightarrow{e_i} = \overrightarrow{0}$$

et tous les coefficients sont nuls car $B' = B_E \cup \mathcal{F}$ est une famille libre (base de $\mathbb{R}^n$). On a donc $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{0}$ et $E \cap F = \{\overrightarrow{0}\}$. Finalement $\mathbb{R}^n = E \oplus F$ d'après la proposition 5.8. □

Cette démonstration montre comment fabriquer des supplémentaires, en complétant une base de E à l'aide de vecteurs d'une base de $\mathbb{R}^n$. En particulier, si on choisit de compléter avec la base canonique de $\mathbb{R}^n$, on voit que E possède un supplémentaire particulièrement simple engendré par certains axes $\overrightarrow{e_i}$ de $\mathbb{R}^n$.

Par exemple, tout plan P de $\mathbb{R}^3$ possède un supplémentaire parmi les trois axes $D = 0x$ $0y$ ou $0z$. On peut prendre $0x$ si $\overrightarrow{e_1} = (1,0,0) \notin P$, $0y$ si $\overrightarrow{e_2} = (0,1,0) \notin P$, ou $0z$ si $\overrightarrow{e_3} = (0,0,1) \notin P$. Bien sûr, le plan P ne peut contenir ces trois vecteurs à la fois !

Somme directe et dimension. Nous énonçons un critère très utile de somme directe utilisant la dimension.

Théorème 5.10. *Soient E et F deux sev de $\mathbb{R}^n$. Alors on a*

$$\mathbb{R}^n = E \oplus F \Leftrightarrow F \cap G = \{\overrightarrow{0}\} \text{ et } \dim E + \dim F = n.$$

Exemples.

- Dans $\mathbb{R}^3$, une droite D et un plan sont supplémentaires ssi $P \cap D = \{\overrightarrow{0}\}$.
- Dans $\mathbb{R}^4$, deux plans P_1 et P_2 sont supplémentaires ssi $P_1 \cap P_2 = \{\overrightarrow{0}\}$. Par exemple

$$P_1 = \mathrm{Vect}(e_1, e_2) \text{ et } P_2 = \mathrm{Vect}(e_3, e_4) \text{ sont supplémentaires.}$$

La preuve du théorème dépend du lemme suivant.

Lemme 5.11. *Soient E et F deux sev de $\mathbb{R}^n$, B_E une base de E et B_F une base de F. Alors on a*

i) $\mathbb{R}^n = E + F \Leftrightarrow B_E \cup B_F$ *est génératrice de* $\mathbb{R}^n$.

ii) $E \cap F = \{\overrightarrow{0}\} \Leftrightarrow B_E \cup B_F$ *est une famille libre.*

Preuve du théorème à l'aide du lemme. On a d'après la proposition 5.8

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^n = E \oplus F &\Leftrightarrow \mathbb{R}^n = E + F \text{ et } E \cap F = \{\overrightarrow{0}\}\\ &\Leftrightarrow B_E \cup B_F \text{ est une base de } \mathbb{R}^n\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} n = \mathrm{Card}(B_E) + \mathrm{Card}(B_F) = \dim E + \dim F\\ \quad\text{et } B_E \cup B_F \text{ est libre ou génératrice}\end{cases}\\ &\Leftrightarrow \begin{cases} n = \dim E + \dim F\\ \text{et } E \cap F = \{\overrightarrow{0}\} \text{ ou } \mathbb{R}^n = E + F.\end{cases}\end{aligned}$$

□

Preuve du lemme. i) à faire en exercice (conséquence directe des définitions).

ii) On suppose que $E \cap F = \{\overrightarrow{0}\}$ et on montrer que $B_E \cup B_F$ est libre. Si $B_E = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_k})$ et $B_F = (\overrightarrow{v_1}, \overrightarrow{v_2}, \cdots, \overrightarrow{v_p})$, on a

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{e_i} + \sum_{j=1}^{p} \mu_j \overrightarrow{v_j} = \overrightarrow{0} &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{e_i} = -\sum_{j=1}^{p} \mu_j \overrightarrow{v_j} \in E \cap F\\ &\Leftrightarrow \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{e_i} = \overrightarrow{0} = \sum_{j=1}^{p} \mu_j \overrightarrow{v_j}\\ &\Leftrightarrow \lambda_i = 0 = \mu_j,\end{aligned}$$

car les familles B_E et B_F sont libres.

Inversement, si $B_E \cup B_F$ est libre et $\overrightarrow{v} \in E \cap F$, alors on l'écrit

$$\begin{aligned}\overrightarrow{v} = \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{e_i} = \sum_{j=1}^{p} \mu_j \overrightarrow{v_j} &\Rightarrow \sum_{i=1}^{k} \lambda_i \overrightarrow{e_i} - \sum_{j=1}^{p} \mu_j \overrightarrow{v_j} = \overrightarrow{0}\\ &\Leftrightarrow \lambda_i = \mu_j = 0,\end{aligned}$$

car $B_E \cup B_F$ est libre. On a bien $\overrightarrow{v} = \overrightarrow{0}$ et $E \cap F = \{\overrightarrow{0}\}$. □

Une application. Le résultat précédent permet de trouver facilement un supplémentaire d'un sev défini par un système d'équations cartésiennes.

Proposition 5.12. *Soit $E = Sol(S)$ un sev de $\mathbb{R}^p$ défini par un système de n équations à p inconnues. On note $B = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \cdots, \overrightarrow{e_p})$ la base canonique de $\mathbb{R}^p$.*

Alors un supplémentaire de E dans $\mathbb{R}^p$ est engendré par les vecteur $\overrightarrow{e_i}$ dont les indices i correspondent aux inconnues ***principales*** *d'un système échelonné équivalent à (S).*

Démonstration. Soit F l'espace engendré par les $\overrightarrow{e_i}$ avec i inconnue principale. Comme les $\overrightarrow{e_i}$ forment une famille libre, on a $\dim F =$ nombre d'inconnues principales.

Par ailleurs, d'après la proposition 4.5, on a $\dim E$ = nombre inconnues non principales de E. On a donc bien

$$\begin{aligned}\dim E + \dim F &= \text{nbre inconnues principales} + \text{nbre inconnues non principales}\\ &= p = \dim \mathbb{R}^p\end{aligned}$$

De plus $\vec{v} \in F$ ssi ses composantes x_j non principales sont nulles. Si de plus $\vec{v} \in E = \mathrm{Sol}(S)$ alors $\vec{v} = \vec{0}$ car c'est la seule solution dont les inconnues non principales sont nulles. □

Comme exemple, soit $E = \{\vec{u} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4,\ x - y + z + t = 0 = 2x - 2y + z + t\}$. On a

$$\begin{cases} x - y + z + t = 0 \\ 2x - 2y + z + t = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{x} - y + z + t = 0 \\ \qquad\quad \boxed{-z} - t = 0 \end{cases}.$$

On a donc $F = \mathrm{Vect}(\vec{e_1}, \vec{e_3})$ supplémentaire de E dans $\mathbb{R}^4$.

5.4 La dimension d'une somme

Pour conclure ce chapitre, on donne une formule sur la dimension d'une somme de deux sev quelconques.

Théorème 5.13 (Formule de Grassmann)**.** *Soit E et F deux sev de $\mathbb{R}^n$.*

Alors on a toujours :

$$n \geq \dim(E + F) = \dim E + \dim F - \dim(E \cap F)\,.$$

Ceci généralise le cas où les sev sont supplémentaires. Cela montre par exemple que si $\dim E + \dim F > n$ alors $E \cap F$ contient au moins une droite. En effet dans ce cas,

$$\dim(E \cap F) = \dim E + \dim F - \dim(E + F) \geq \dim E + \dim F - n > 0\,.$$

On retrouve ainsi que deux plans vectoriels de $\mathbb{R}^3$ se coupent suivant une droite, ce qui est facile, mais aussi que deux sev de dimension 3 dans $\mathbb{R}^4$ se rencontrent suivant au moins un plan, ce qui est plus difficile à visualiser !

Démonstration. Soit V un supplémentaire de $E \cap F$ dans F. On a alors

$$F = V \oplus (E \cap F) \tag{2}$$

On montre que

$$E + F = E \oplus V. \tag{3}$$

• Soit $\overrightarrow{u} \in E + F$.

Alors $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_2}$ avec $\overrightarrow{v_1} \in E$ et $\overrightarrow{v_2} \in F$. Comme $F = V \oplus (E \cap F)$ on peut écrire $\overrightarrow{v_2} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{v_3}$ avec $\overrightarrow{v} \in V$ et $\overrightarrow{v_3} \in E \cap F \subset E$. On a donc

$$\overrightarrow{u} = (\overrightarrow{v_1} + \overrightarrow{v_3}) + \overrightarrow{v} \in E + V,$$

et $E + F \subset E + V$, l'inclusion opposée étant claire.

• Soit $\overrightarrow{u} \in E \cap V$.

Alors $\overrightarrow{u} \in E \cap F$ car $V \subset F$. On a alors $\overrightarrow{u} \in (E \cap F) \cap V = \{\overrightarrow{0}\}$ car $E \cap F$ et V sont supplémentaires dans F. On a bien $E \cap V = \{\overrightarrow{0}\}$ et la somme directe (3) par le critère de la proposition 5.8.

• De (3), on déduit que

$$\dim(E + F) = \dim E + \dim V$$

avec d'après (2), $\dim F = \dim V + \dim(E \cap F)$, d'où $\dim V = \dim F - \dim(E \cap F)$ et le résultat. $\square$

---

email : `michel.rumin@math.u-psud.fr`

page web : `http://www.math.u-psud.fr/~rumin/enseignement/enseignement.html`