

Feuille d'exercices n°3

BASES, DIMENSION, SOMMES ET SOUS-ESPACES SUPPLÉMENTAIRES

Exercice 1 - *Famille libre ou liée.*

Soient $\vec{v}_1 = (1, 1, 0)$, $\vec{v}_2 = (4, 1, 4)$ et $\vec{v}_3 = (2, -1, 4)$.

1. Vérifier que \vec{v}_1 et \vec{v}_2 ne sont pas colinéaires, puis qu'il en est de même pour \vec{v}_2 et \vec{v}_3 , ainsi que pour \vec{v}_1 et \vec{v}_3 .
2. La famille $\mathcal{F} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est-elle libre ? Sinon, donner une relation de dépendance linéaire.

Exercice 2 - *Coordonnées dans une base.*

1. Vérifier que les vecteurs $\vec{v}_1 = (1, 0, 0)$, $\vec{v}_2 = (1, 1, 0)$ et $\vec{v}_3 = (1, 1, 1)$ forment une base de \mathbb{R}^3 .
2. Calculer les coordonnées d'un vecteur $\vec{u} = (x, y, z)$ dans cette base.

Exercice 3 - *D'après annales PeiP.*

Pour a réel donné, on considère dans \mathbb{R}^3 les vecteurs

$$\vec{v}_1 = (1, 0, 1), \quad \vec{v}_2 = (1, 2, 3), \quad \vec{v}_3 = (1, 1, -1) \quad \text{et} \quad \vec{v}_4 = (2a, a + 1, 4).$$

1. Montrer que $B = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$ est une base de \mathbb{R}^3 .
2. Donner une équation du plan P engendré par \vec{v}_2 et \vec{v}_3 .
3. Pour quelles valeurs de a la famille $(\vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$ est-elle une base de \mathbb{R}^3 ? (On pourra utiliser la question précédente.)
4. Déterminer les coordonnées de \vec{v}_4 dans la base B .
5. Pour quelles valeurs de a la famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_4)$ est-elle une base de \mathbb{R}^3 ? (On pourra utiliser la question précédente.)

Exercice 4 - *Extraction de base d'un système générateur.*

Dans \mathbb{R}^4 on considère les vecteurs

$$\vec{v}_1 = (1, -1, 2, 0), \quad \vec{v}_2 = (0, 2, 1, 1), \quad \vec{v}_3 = (1, 1, 3, 1), \quad \vec{v}_4 = (2, 0, 5, 1).$$

1. La famille $\mathcal{F} = (\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3, \vec{v}_4)$ est-elle libre ? Quel est son rang ?
2. Soit $E = \text{Vect}(\mathcal{F})$. Déterminer la dimension de E et extraire de \mathcal{F} une base de E .

Exercice 5 - *Dimension et base d'un sev défini par un système d'équations.*

1. Déterminer la dimension et donner une base du sev de \mathbb{R}^4 défini par

$$E = \{ \vec{v} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x - 2y + 3z - 4t = 0 \}.$$

2. Même question avec

$$F = \{ \vec{v} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + 2y + z + 2t = 0 = -2x - 4y + z - t \}.$$

Exercice 6 - Dimension et égalité d'espaces.

Montrer que les deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^3 définis par

$$E = \text{Vect}((-1, 3, 2), (-2, -1, 1)) \text{ et } F = \text{Vect}((0, 7, 3), (-7, 0, 5))$$

sont égaux. (Remarquer que $\dim E = \dim F$.)

Exercice 7 - Longueur des suites libres et génératrices.

Soit E un sous-espace vectoriel de \mathbb{R}^5 .

1. Que dire de $\dim E$?
2. Dans cette question, on suppose que E est engendré par une famille $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$. Montrer que toute famille de 4 vecteurs de E est liée.
3. Dans cette question, on suppose que E contient une famille libre $(\vec{v}_1, \vec{v}_2, \vec{v}_3)$. Montrer qu'aucune partie de E à 2 éléments n'est génératrice et qu'une famille génératrice de E à 3 éléments en est une base.

Exercice 8 - Base incomplète.

1. Soient $\vec{v}_1 = (1, -2, 1)$ et $\vec{v}_2 = (-1, 2, 1)$. Compléter la famille libre (\vec{v}_1, \vec{v}_2) en une base de \mathbb{R}^3 .
2. Même question avec $\vec{v}_1 = (1, -2, 1)$ et $\vec{v}_2 = (2, 2, -1)$.

Exercice 9 - Supplémentaire.

On considère le sous-espace vectoriel E de \mathbb{R}^4 défini par

$$E = \{ \vec{v} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, 2x - 2y - z + t = 0 \}.$$

1. Déterminer la dimension et une base de E .
2. Donner un supplémentaire de E .
3. Mêmes questions avec

$$F = \{ \vec{v} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x - 2y - z + 2t = 0 = x + y + 2z + t = y + z + t \}.$$

Exercice 10 - Pour a réel donné, on considère dans \mathbb{R}^4 les deux sous-espaces vectoriels :

$$E = \{ \vec{v} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid y + z + t = x - y + t = 0 \},$$

et $F = \text{Vect}(\vec{v}_1, \vec{v}_2)$ avec $\vec{v}_1 = (1, 1, 1, 0)$ et $\vec{v}_2 = (0, a, 0, 1)$.

1. Déterminer une base de E .
2. Pour quelles valeurs de a a-t-on $E \cap F = \{0\}$?
3. Pour quelles valeurs de a les espaces E et F sont-ils supplémentaires ?
4. Donner une base de $E + F$.

Exercice 11 - Somme de deux espaces.

On considère les deux sous-espaces vectoriels de \mathbb{R}^4 :

$$E = \{ \vec{v} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, y + z + t = 0 \} \text{ et } F = \{ \vec{v} = (x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4, x + y = 0 \text{ et } z = 2t \}.$$

1. Déterminer la dimension et une base de E et F .
2. Trouver la dimension et une base de $E \cap F$.
3. Que peut-on dire de $E + F$? La somme est-elle directe ?