Feuille d'exercices n°5

Noyau, image, matrices inversibles et changement de base

Exercice 1 - *Noyau et image d'une application.*

On considère la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & -2 \\ -2 & -1 & 4 \end{pmatrix}$$

et on note $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$, $X \mapsto AX$ l'application linéaire associée.

1. Déterminer le rang de f et une base de $\operatorname{Im} f$. L'application f est-elle surjective ?

2. Que vaut $\dim \ker f$? f est-elle injective ? Déterminer une base de $\ker f$.

Exercice 2 - *Construction d'exemples.*

1. Donner un exemple d'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dont l'image est engendrée par le vecteur $\overrightarrow{v_1} = (1, 2, 3)$.

2. Donner un exemple d'application linéaire $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^p$ dont le noyau est la droite engendrée par $\overrightarrow{v_2} = (1, -1, 1)$. Quelle est la valeur minimale de p possible pour un tel exemple ?

Exercice 3 - *Supplémentaire du noyau et isomorphisme induit.*

Soit $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire associée à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ -2 & -1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -3 & -5 \end{pmatrix}.$$

1. Donner le rang de f et une base de $\operatorname{Im} f$. Quelle est la dimension de $\ker f$?

2. Donner une équation liant a, b, c qui soit satisfaite si et seulement si l'équation $f(\overrightarrow{u}) = (a, b, c)$ admet une solution. Combien l'équation $f(\overrightarrow{u}) = (1, 1, 2)$ a-t-elle de solutions ? et l'équation $f(\overrightarrow{u}) = (1, 1, -2)$?

3. Soit $E = \operatorname{Vect}\big(\overrightarrow{e_1} = (1, 0, 0, 0), \overrightarrow{e_2} = (0, 1, 0, 0)\big)$. Montrer que $E \oplus \ker f = \mathbb{R}^4$. Comparer $f(E)$ et $\operatorname{Im} f$.

4. Lorsque $\overrightarrow{v} \in \operatorname{Im} f$ montrer que l'équation $f(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v}$ admet une *unique* solution $\overrightarrow{u} \in E$. La déterminer pour $\overrightarrow{v} = (1, 1, -2)$.

Exercice 4 - *Matrices inversibles.*

Décider si les matrices suivantes sont inversibles, et si oui, calculer leur inverse :

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -3 & 6 \end{pmatrix},\ C = \begin{pmatrix} a & -b \\ b & a \end{pmatrix},\ D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$E = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ F = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 1 & 3 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ G = \begin{pmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{pmatrix},\ H = \begin{pmatrix} 0 & -c & b \\ c & 0 & -a \\ -b & a & 0 \end{pmatrix}.$$

Exercice 5 - *Inverse à gauche.*

Soient $A = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 1 & -2 & -5 \\ -2 & 5 & 11 \end{pmatrix}$.

1. Calculer BA. En déduire que si $AX = Y$ alors $X = BY$.

2. Peut-on en déduire que A est inversible ?

3. Déterminer le rang de A et $\dim \ker B$? Montrer que $\mathbb{R}^3 = \operatorname{Im} A \oplus \ker B$.

4. Montrer que $(AB)X = X$ pour $X \in \operatorname{Im} A$ et $(AB)X = 0$ pour $X \in \ker B$. Quelle est l'interprétation géométrique de AB ?

Exercice 6 - *Matrice de passage.*

On note $B_3 = (\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2}, \overrightarrow{e_3})$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$.

1. Montrer que $B' = (\overrightarrow{u_1} = (-1, 2, 3),\ \overrightarrow{u_2} = (1, -1, 1),\ \overrightarrow{u_3} = (-1, 1, -2))$ est une base de $\mathbb{R}^3$. Donner la matrice de passage P de B_3 à B'.

2. Soit $\overrightarrow{u} = x'\overrightarrow{u_1} + y'\overrightarrow{u_2} + z'\overrightarrow{u_3} = (x', y', z')_{B'}$. Quel calcul matriciel permet de déterminer les composantes x, y, z de $\overrightarrow{u}$ dans la base canonique ?

3. Inversement, si $\overrightarrow{u} = (x, y, z)$, exprimer les coordonnées de $\overrightarrow{u}$ dans la base B'.

4. On pose $P = \operatorname{Vect}(\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2})$. À quelle condition sur x', y', z' le vecteur $\overrightarrow{u} = (x', y', z')_{B'}$ appartient-il à P ? En déduire une équation cartésienne de P dans la base canonique.

5. On pose $E = \operatorname{Vect}(\overrightarrow{e_1}, \overrightarrow{e_2})$. Donner une équation cartésienne de E dans la base B'.

Exercice 7 - *Changement de base, suite.*

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire dont la matrice dans la base canonique est

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & -1 \\ -5 & -3 & 1 \\ 10 & 8 & -1 \end{pmatrix}$$

On pose $A' = \operatorname{Mat}_{B'}(f)$, où B' est la base de l'exercice précédent.

1. Quelle formule utilisant P, P^{-1} et A permet de calculer A' ?

2. Déterminer A', soit à l'aide de cette formule, soit en exprimant directement l'image de B' par f dans B'. Quelle est la signification géométrique de f ?

3. Calculer A'^2 et en déduire A^2.

Exercice 8 - *Extrait annales PeiP.*

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ l'application linéaire $X \mapsto AX$ associée à la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 4 & -6 \\ -1 & 2 & -3 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer le rang de f et une base de $\operatorname{Im} f$. Que vaut $\dim \ker f$?

2. Donner une base de $\ker f$. Les espaces $\ker f$ et $\operatorname{Im} f$ sont-ils supplémentaires dans $\mathbb{R}^3$?

3. Calculer $f(1, -2, -1)$.

4. Déterminer à l'aide de ce qui précède une base $B' = (\overrightarrow{u_1}, \overrightarrow{u_2}, \overrightarrow{u_3})$ de $\mathbb{R}^3$ dans laquelle la matrice de f s'écrit

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

5. Que vaut la matrice de f^n dans B' ? dans B ?