S2 PeiP — Orsay 2015-2016
Mathématiques

Feuille d'exercices n°6

Matrices et applications linéaires :
compléments, exercices de synthèse et de modélisation

Exercice 1 - Soit $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & 2 & 1 & -1 \\ 1 & 3 & 3 & -4 \\ 1 & 4 & 5 & -7 \end{pmatrix}$.

1. Déterminer le rang de A et une base de $\operatorname{Im} A$.

2. Existe-t-il une matrice inversible B telle que $B^{-1} = A$?

Exercice 2 - Soient $A \in M_{4,3}(\mathbb{R})$ et $B \in M_{3,4}(\mathbb{R})$.

1. Quelles sont les tailles des matrices AB et BA ?

2. Montrer que $\operatorname{Im} AB \subset \operatorname{Im} A$ et $\ker B \subset \ker AB$.

3. La matrice AB peut-elle être inversible ? Qu'en est-il pour BA ?

Exercice 3 - *Un problème à méditer dans son bain !*

Un joaillier de Syracuse utilisait pour confectionner ses bijoux un alliage d'or et d'argent ; métaux de densités respectives 20 et 10 grammes par cm^3.

Le roi Hiéron II lui commanda une couronne de 5 kg, en exigeant que l'or en constitue au moins 90% de sa masse. Le joaillier lui procura une très belle pièce, mais Archimède, l'ami du roi, doutait de sa pureté. Alors qu'il prenait son bain, il eut une idée pour vérifier la composition de la couronne. En la plongeant dans l'eau, il constata que son volume était de 370 cm^3.

1. Que s'est alors écrié Archimède ?

2. Déterminer la matrice A qui, étant donné un bijou fabriqué par ce joaillier, applique le vecteur $X = \begin{pmatrix} \text{masse d'or} \\ \text{masse d'argent} \end{pmatrix}$ en le vecteur $Y = \begin{pmatrix} \text{masse totale} \\ \text{volume total} \end{pmatrix}$.

3. En déduire un calcul de la composition de la couronne.

4. Le joaillier a-t-il intérêt à faire ses bagages rapidement ?

Exercice 4 - Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ une application linéaire telle que $f \circ f = -\mathrm{Id}$.

1. Connaissez-vous un exemple d'une telle application ?

2. Soit $\overrightarrow{u}$ un vecteur non nul de $\mathbb{R}^2$. Montrer que la famille $B = (\overrightarrow{u}, f(\overrightarrow{u}))$ est libre. (On pourra raisonner par l'absurde et supposer que $f(\overrightarrow{u}) = \lambda \overrightarrow{u}$.)

3. Donner la matrice de f dans cette base.

Exercice 5 - *Une caractérisation des projections.*

On suppose que $\mathbb{R}^n = E \oplus F$ et on considère la projection p sur E parallèlement à F.

1. Rappeler la définition de p. Montrer que

$$E = \operatorname{Im} p = \ker(p - \mathrm{Id}) = \{\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n \mid p(\overrightarrow{v}) = \overrightarrow{v}\}, \ F = \ker p, \ \text{et que } p \circ p = p.$$

2. Si B est une base quelconque de $\mathbb{R}^n$ et $P = \mathrm{Mat}_B(p)$ est la matrice de p dans cette base, montrer que $P^2 = P$. Que vaut la trace de P ?

Inversement, on suppose que $p \in \mathrm{End}(\mathbb{R}^n)$ satisfait $p^2 = p$. On veut montrer que p est la projection sur $E = \ker(p - \mathrm{Id})$ le long de $F = \ker p$.

3. Soit $\overrightarrow{v} \in \mathbb{R}^n$ quelconque. Montrer que $p(\overrightarrow{v}) \in E$ et $\overrightarrow{v} - p(\overrightarrow{v}) \in F$.

4. En déduire que $\mathbb{R}^n = E \oplus F$ en remarquant que $\overrightarrow{v} = p(\overrightarrow{v}) + \overrightarrow{v} - p(\overrightarrow{v})$. Conclure que p est la projection voulue.

5. *Deux exemples (pour le prix d'un !)*

Montrer que $P = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & -1 \end{pmatrix}$ et $Q = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \\ -2 & -4 & 2 \end{pmatrix}$ sont des projections. Déterminer $\mathrm{Im}\, P$ et $\ker P$. Il y a-t-il un lien entre P et Q ?

Exercice 6 - *Les symétries.*

On suppose que $\mathbb{R}^n = E \oplus F$. La *symétrie* par rapport à E suivant F est l'application linéaire s définie par

$$\begin{aligned} s : E \oplus F &\longrightarrow \mathbb{R}^n \\ \overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w} &\longmapsto s(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{v} - \overrightarrow{w}. \end{aligned}$$

1. Montrer que $s \circ s = \mathrm{Id}$. Si $S = \mathrm{Mat}_B(s)$ est la matrice de s dans une base B, montrer que $S^2 = I_n$. Que vaut la trace de S ?

2. Montrer que S est inversible et déterminer son inverse.

Exercice 7 - *Exemples de symétries.*

Dans $\mathbb{R}^3$, soit P le plan d'équation $ax + by + xz = 0$ avec a, b ou $c \neq 0$. On note $\ell(x, y, z) = ax + by + cz$. On suppose que $\overrightarrow{u}_0 = (x_0, y_0, z_0) \notin P$ et on note $D = \mathrm{Vect}(\overrightarrow{u}_0)$.

1. Montrer que $\mathbb{R}^3 = P \oplus D$. Soit $\overrightarrow{u} \in \mathbb{R}^3$, montrer que $\overrightarrow{u} = \overrightarrow{v} + \overrightarrow{w}$ avec

$$\overrightarrow{v} = \overrightarrow{u} - \frac{\ell(\overrightarrow{u})}{\ell(\overrightarrow{u}_0)}\overrightarrow{u}_0 \in P \quad \text{et} \quad \overrightarrow{w} = \frac{\ell(\overrightarrow{u})}{\ell(\overrightarrow{u}_0)}\overrightarrow{u}_0 \in D\,.$$

2. Soit s la symétrie par rapport à P suivant D. Montrer que

$$s(\overrightarrow{u}) = \overrightarrow{u} - 2\frac{\ell(\overrightarrow{u})}{\ell(\overrightarrow{u}_0)}\overrightarrow{u}_0\,.$$

3. Donner les matrices dans la base canonique de la symétrie s_1 par rapport au plan P d'équation $x + y + z = 0$, le long de $D = \mathrm{Vect}(1, 1, -1)$, puis celle de la symétrie s_2 par rapport à D le long de P.

4. Soit P le plan d'équation $ax + by + cz = 0$ avec $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Donner la matrice dans la base canonique de la symétrie orthogonale par rapport à P. Comparer avec la matrice de la projection orthogonale sur P.

Exercice 8 - *Diagonalisation et puissances d'une matrice* 2×2.

Soient $A = \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ et $f : X \mapsto AX$ l'endomorphisme de $\mathbb{R}^2$ associé.

Pour $\lambda \in \mathbb{R}$, on considère $f_\lambda = f - \lambda \mathrm{Id}$, et on note A_λ sa matrice dans la base canonique.

1. Calculer le déterminant $P(\lambda)$ de A_λ (le déterminant des matrices 2×2 est bien au programme). Pour quelles valeurs de $\lambda \in \mathbb{R}$ l'application $f_\lambda = f - \lambda \mathrm{Id}$ est-elle un isomorphisme ?

2. Montrer qu'il existe deux vecteurs $\overrightarrow{v_2}$ et $\overrightarrow{v_3}$ non nuls tels que $f(\overrightarrow{v_2}) = 2\overrightarrow{v_2}$ et $f(\overrightarrow{v_3}) = 3\overrightarrow{v_3}$.

3. En déduire qu'il existe une base B' de $\mathbb{R}^2$ dans laquelle la matrice A' de f soit diagonale.

4. Calculer la puissance $(A')^n$. Donner la relation entre A' et A, puis entre $(A')^n$ et A^n. En déduire un calcul de A^n.

Exercice 9 - *Exercice de modélisation (Annales 2014).*

Chaque année, une société de pêche lâche 100 jeunes poissons dans un lac. D'une année à l'autre :

— 80% des jeunes poissons (J) meurent, et 20% deviennent adultes ;

— un poisson adulte (A) se reproduit en donnant naissance en moyenne à 2 jeunes poissons, puis 50% des poissons adultes meurent ou sont péchés.

1. L'année n, on note $X(n) = (J(n), A(n))$ la population de poissons. Montrer que, écrit en colonne, $X(n)$ satisfait une relation de recurrence du type $X(n+1) = MX(n) + E$ avec M une matrice fixe et E un vecteur fixe.

2. Montrer qu'il existe une population stationnaire et la calculer.

Exercice 10 - *Chaîne de Markov à deux états.*

On considère l'évolution d'un système à deux états : A et B. Soient p et q deux réels donnés dans $[0, 1]$. D'un instant t à l'instant $t+1$, la probabilité de passer de A à B est p, et celle de passer de B à A est q.

1. Donner le graphe de la chaîne de Markov associée (en précisant les probabilités des transitions qui ne sont pas données dans l'énoncé). Montrer que la matrice de transition M associée (dans la convention du cours) est

$$M = \begin{pmatrix} 1-p & q \\ p & 1-q \end{pmatrix}.$$

2. Calculer $M - I_2$. En déduire que si p ou q est non nul, alors il existe un unique vecteur état stationnaire $E_1 = (x, y)$ et le calculer. (On rappelle que l'on veut $x \geq 0$, $y \geq 0$ et $x + y = 1$ pour interpréter E_1 comme une répartition probabiliste du système entre les deux états A et B.)

3. Soit $E_2 = (1, -1)$. Calculer ME_2. En déduire que dans la base $B' = (E_1, E_2)$ la matrice de l'application associée à M est donnée par

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1-p-q \end{pmatrix}.$$

4. Calculer $(M')^n$. En déduire que si p et $q \in]0, 1[$, alors quelle que soit la condition initiale X_0, la suite de vecteurs $X(n) = (M')^n X_0$ converge vers un multiple de E_1. Quel résultat du cours a-t-on montré (dans un cas particulier) ? Que se passe-t-il pour $p = q = 1$?