

TEST DE MATHÉMATIQUES  
questions pour le contrôle en TD  
la semaine du 21 septembre 2009

Attention, ce document comporte 2 pages (et 19 questions).

*Pour chacune des assertions 1 à 9,*

- *dire si elle est vraie ou fausse ;*
- *la démontrer ou en donner un contre-exemple.*

1. Pour tous réels  $x$  et  $y$ ,  $(x < y < 0) \Leftrightarrow \left(\frac{1}{y} > \frac{1}{x}\right)$ .

2. Pour tous réels  $x$  et  $y$  non nuls,  $(x < y) \Leftrightarrow \left(\frac{x}{y} < 1\right)$ .

3. L'assertion  $\mathcal{P}$  suivante est vraie.

$$\mathcal{P} : \quad (\forall t \in \mathbf{R}) (\forall y \in \mathbf{R}) \left( ((t \leq 1) \text{ et } (y > 0)) \Rightarrow (ty < y) \right).$$

4. L'assertion  $\mathcal{Q}$  suivante est vraie.

$$\mathcal{Q} : \quad (\forall t \in \mathbf{R}) \left( (t \geq 1) \Rightarrow ((\exists y \in \mathbf{R}) (ty > y)) \right).$$

5. Pour tout entier  $n$  strictement positif,  $((n \mid 16) \text{ et } (n^2 \neq n)) \Rightarrow (n \text{ pair})$ .

6. Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  des sous-ensembles d'un ensemble  $E$ .

$$\text{Alors } C \cup (B \setminus A) = (C \cup B) \setminus A.$$

7. Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  des sous-ensembles d'un ensemble  $E$ .

$$\text{Alors } C \setminus (B \cup A) = (C \setminus A) \setminus B.$$

8. Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  des sous-ensembles d'un ensemble  $E$ .

$$\text{Alors } C \cap (B \setminus A) = (C \cap B) \setminus A.$$

9. Soient  $A$ ,  $B$  et  $C$  des sous-ensembles d'un ensemble  $E$ .

$$\text{Le complémentaire de } A \cup (B \cap C) \text{ est } \overline{A} \cap (\overline{B} \cup \overline{C}).$$

(On note ici  $\overline{F}$  le complémentaire d'une partie  $F$  de  $E$ .)

Les questions 10 à 19 portent sur des manipulations d'assertions ; certaines se réfèrent aux assertions  $\mathcal{P}$  et  $\mathcal{Q}$  des questions 3 et 4. Pour chacune,

- dire si la manipulation est correcte ou non
- si non, rétablir la conclusion exacte.

10. La négation de  $((x^2 \geq 9) \text{ ou } (x \in ]2, 5]))$  est  $(x \in [-3, 2])$ .

11. La négation de l'assertion  $\mathcal{P}$  de la question 3 est

$$(\exists t \in \mathbf{R}) (\exists y \in \mathbf{R}) (((t \leq 1) \text{ et } (y > 0)) \text{ et } (ty \geq y)).$$

12. La négation de l'assertion  $\mathcal{Q}$  de la question 4 est

$$(\exists t \in \mathbf{R}) ((t \geq 1) \text{ ou } ((\forall y \in \mathbf{R}) (ty \leq y))).$$

13. La réciproque de  $\mathcal{P}$  est l'assertion

$$(\forall t \in \mathbf{R}) (\forall y \in \mathbf{R}) ((ty < y) \Rightarrow ((t \leq 1) \text{ ou } (y > 0))).$$

14. La réciproque de  $\mathcal{Q}$  est l'assertion

$$(\forall t \in \mathbf{R}) (((\exists y \in \mathbf{R}) (ty \leq y)) \Rightarrow (t \geq 1)).$$

15. La contraposée de  $\mathcal{P}$  est l'assertion

$$(\forall t \in \mathbf{R}) (\forall y \in \mathbf{R}) ((ty \leq y) \Rightarrow ((t > 1) \text{ ou } (y \leq 0))).$$

16. La contraposée de  $\mathcal{Q}$  est l'assertion

$$(\forall t \in \mathbf{R}) (((\exists y \in \mathbf{R}) (ty \leq y)) \Rightarrow (t < 1)).$$

17. L'assertion « étant donnés trois entiers relatifs, si leur produit est non nul, alors chacun d'entre eux est non nul » se traduit par

$$(\forall a \in \mathbf{Z}) (\forall b \in \mathbf{Z}) (\forall c \in \mathbf{Z}) ((abc \neq 0) \Rightarrow ((a \neq 0) \text{ et } (b \neq 0) \text{ et } (c \neq 0))).$$

18. L'assertion « une condition nécessaire pour qu'une année soit bissextile est que son millésime soit un multiple de 4 » se traduit par

$$\text{L'année } n \text{ est bissextile} \Rightarrow n \text{ est un multiple de 4.}$$

19. L'assertion « en S1-IFIPS, il y a dans chaque groupe de TD deux étudiants qui ont leur anniversaire le même jour » se traduit par

$$(\forall i \in \{1, 2, 3, 4\}) (\exists x \in G_i) (\exists y \in G_i) ((x \neq y) \text{ ou } (\text{anniv}(x) = \text{anniv}(y))).$$