Examen partiel de Théorie des nombres

Vendredi 21 janvier 2022. Durée : 3 heures.

Documents autorisés, appareils électroniques interdits.

La qualité de l'argumentation et la précision des arguments seront pris en compte dans l'évaluation.

Exercice 1 Soit F un corps de nombres. On note $\psi_{\mathbb{Q}}$ l'unique caractère unitaire de $\mathbb{A}_{\mathbb{Q}}$ tel que $\psi_{\mathbb{Q}}(\mathbb{Q}) = 1$, dont la composante archimédienne est le caractère $x \mapsto e^{-2\pi i x}$ et tel que $\psi_{\mathbb{Q},p}(\mathbb{Z}_p) = 1$ pour tout nombre premier. On note $\psi = \psi_{\mathbb{Q}} \circ \mathrm{Tr}_{F/\mathbb{Q}}$, c'est un caractère de $\mathbb{A}_F$. Pour toute place v de F on note ψ_v la composante de ψ en v et dx_v la mesure autoduale de F_v relativement à ψ_v.

1. Calculer $\psi_{\mathbb{Q},p}(p^{-1})$ pour tout nombre premier p et montrer que pour toute place v de F au-dessus de p, le conducteur de ψ_v est l'inverse de la différente de F_v sur $\mathbb{Q}_p$.

Si ω est un caractère unitaire de $F_v^\times$, on pose

$$W_v(\omega) := \varepsilon(\psi_v, \omega|\cdot|_v^{\frac{1}{2}}).$$

2. Soit v une place de F et soit ω un caractère unitaire de $F_v^\times$. En utilisant l'équation fonctionnelle locale, montrer que $W_v(\omega)W_v(\omega^{-1}) = \omega(-1)$. En conclure que $|W_v(\omega)| = 1$.
3. Soit v une place ultramétrique de F et π_v une uniformisante de F_v. Soit ω un caractère unitaire et non ramifié de $F_v^\times$. Si $f = \mathbb{1}_{\mathcal{O}_{F_v}}$, calculer $Z(f,\omega)$ et $Z(\hat{f},\omega)$. En déduire que $W_v(\omega) = \omega(\pi_v)^{d_v}$ où $(\pi_v^{d_v})$ est le conducteur de ψ_v.

On fixe χ un caractère de $\mathbb{A}_F^\times/F^\times$ d'ordre exactement 2. On suppose que, pour toute place archimédienne v de F, le caractère χ_v est trivial et que, pour toute place finie v de F, le caractère local χ_v est non ramifié. Si $\mathfrak{a}$ désigne un idéal fractionnaire de $\mathcal{O}_F$, on note

$$\chi(\mathfrak{a}) = \prod_{\mathfrak{p}} \chi(\pi_{\mathfrak{p}})^{v_{\mathfrak{p}}(\mathfrak{a})}$$

où $\pi_{\mathfrak{p}}$ est une uniformisante du complété $F_{\mathfrak{p}}$. On pose $W(\chi) = \prod_v W_v(\chi_v)$.

4. Justifier la définition de $W(\chi)$ et montrer que $W_v(\chi_v) = 1$ si v est archimédienne (on pourra utiliser sans démonstration qu'il existe une fonction de Schwartz positive et non nulle sur F_v telle que $\hat{f} = f$).
5. Montrer que $W(\chi) \in \{1, -1\}$.
6. On note $\mathcal{D}_{F/\mathbb{Q}}$ la différente de l'extension $F/\mathbb{Q}$. Montrer que $W(\chi) = \chi(\mathcal{D}_{F/\mathbb{Q}})^{-1}$.

7. Montrer qu'il existe une unique extension quadratique E/F telle que $F^\times N_{E/F}(\mathbb{A}_E^\times) = \operatorname{Ker}\chi$. Montrer que l'extension E/F est non ramifiée et que $E_w = F_v$ pour toute place w de E dominant une place archimédienne v de F.
8. Soit $\mathfrak{p}$ un idéal premier de $\mathcal{O}_K$. Montrer que
$$\prod_{\mathfrak{q}|\mathfrak{p}}(1 - N\mathfrak{q}^{-s}) = (1 - N\mathfrak{p}^{-s})(1 - \chi_\mathfrak{p}(\pi_\mathfrak{p})N\mathfrak{p}^{-s}),$$
le produit portant sur les idéaux maximaux de $\mathcal{O}_E$ divisant $\mathfrak{p}$ (on rappelle que si K est un corps de nombres et $\mathfrak{a}$ un idéal maximal de $\mathcal{O}_K$, on note $N\mathfrak{a}$ le cardinal de $\mathcal{O}_K/\mathfrak{a}$). En déduire que, pour tout $s \in \mathbb{C}$ tel que $\operatorname{Re} s > 1$, on a l'égalité
$$\zeta_E(s) = \zeta_F(s)L(\chi, s).$$
9. En déduire que $\varepsilon(\chi, s) = (|\Delta_E||\Delta_F|^{-1})^{s-\frac{1}{2}}$ puis que $W(\chi) = 1$.
10. Montrer que la classe de la différente $\mathcal{D}_{F/\mathbb{Q}}$ dans le groupe des classes d'idéaux de $\mathcal{O}_F$ est toujours un carré.

Exercice 2 Soit p un nombre premier. Soit $n \geqslant 1$ un entier et soit $K = \mathbb{Q}(\zeta_{p^n})$ où $\zeta_{p^n} = e^{\frac{2\pi i}{p^n}}$.

1. Montrer que pour tout $i \geqslant 1$ premier à p, on a une égalité d'idéaux de $\mathcal{O}_K$: $(\zeta_{p^n}^i - 1) = (\zeta_{p^n} - 1)$.
2. En déduire que l'extension $K/\mathbb{Q}$ est totalement ramifiée en p, de degré $p^{n-1}(p-1)$ et que $(\zeta_{p^n} - 1)$ en est une uniformisante en p.
3. Si $a \in \mathbb{Z}$ est premier avec p, on note σ_a l'unique élément de $\operatorname{Gal}(K/\mathbb{Q}_p)$ tel que $\sigma_a(\zeta_{p^n}) = \zeta_{p^n}^a$. Montrer que l'application $a \mapsto \sigma_a$ induit un isomorphisme de groupes de $(\mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z})^\times$ sur $\operatorname{Gal}(K/\mathbb{Q})$.
4. On note K_p le complété de K en l'unique place divisant p. Montrer que l'application de restriction de K_p à $\mathbb{Q}_p$ induit un isomorphisme de groupes
$$\operatorname{Gal}(K_p/\mathbb{Q}_p) \xrightarrow{\sim} \operatorname{Gal}(K/\mathbb{Q}).$$
5. Si ℓ est un nombre premier différent de p, montrer que $\operatorname{Frob}_{K/\mathbb{Q}}(\ell) = \sigma_\ell$ (on pourra admettre que $K/\mathbb{Q}$ est non ramifié hors de p).
6. On note $r_{K_p/\mathbb{Q}_p}$ l'isomorphisme de réciprocité local de $K_p/\mathbb{Q}_p$. En utilisant la loi de réciprocité d'Artin, montrer que $r_{K_p/\mathbb{Q}_p}(p) = 1$ (on pourra considérer l'idèle $(p, \dots, p, \dots) \in \mathbb{A}_\mathbb{Q}$).
7. Soit ℓ un nombre premier différent de p. Montrer que $\ell \in \mathbb{Z}_p^\times$ et que $r_{K_p/\mathbb{Q}_p}(\ell) = \sigma_\ell^{-1}$ (on pourra utiliser la loi de réciprocité d'Artin).
8. Conclure que si $x \in \mathbb{Z}_p^\times$, alors $r_{K_p/\mathbb{Q}_p}(x) = \sigma_{x^{-1}}$.
9. Déterminer le sous-groupe $N_{K_p/\mathbb{Q}_p}(K_p^\times)$ de $\mathbb{Q}_p^\times$.