Feuille de TD n° 1

Exercice 1.

1. Jean, Luc et Marc lancent chacun un dé.
   (a) Donner un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ associé à cette expérience aléatoire.
   (b) Soient $i, j \in \{1, \dots, 6\}$ deux numéros différents. Calculer la probabilité qu'avec les trois dés, ils obtiennent :
      i. deux fois le numéro i et une fois le numéro j ;
      ii. au moins deux numéros identiques ;
      iii. 9 en additionnant les trois numéros obtenus.
2. Une personne lance trois dés identiques. L'espace de probabilité défini dans la question 1(a) convient-il encore pour décrire cette expérience aléatoire ?
3. Jean prend au hasard un jeton dans un sac qui contient n jetons numérotés de 1 à n, puis passe le sac avec les jetons restants à Luc qui en prend un à son tour et le donne ensuite à Marc pour qu'il en choisisse un à son tour.
   (a) Munir l'espace $(\Omega = \{1, ..., n\}^3, \mathcal{P}(\Omega))$ d'une probabilité $\mathbb{P}$ qui rend compte de cette expérience.
   (b) Soit $k \in \{1, \dots, n\}$. Quelle est la probabilité que Marc tire le numéro k ?
   (c) Quelle est la probabilité que Marc obtienne un numéro supérieur à ceux de Jean et de Luc ?

Exercice 2. Paradoxe des anniversaires.

1. Quelle est la probabilité que parmi r personnes, au moins deux personnes aient leur anniversaire le même jour ? On commencera par donner un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ associé à cette expérience aléatoire.
2. Pour quelles valeurs de r cette probabilité dépasse-t-elle $1/2$?

Exercice 3. Soit un entier $n \geq 2$. On suppose que n livres sont posés au hasard côte à côte sur une étagère et que, parmi ces livres, il y en a $k \in \{2, \dots, n\}$ qui sont de l'auteur M.

1. Proposer un codage de la disposition des livres de l'auteur M sur cette étagère qui n'utilise que des 0 et des 1.
2. Quelle est la probabilité pour que tous les livres de l'auteur M soient côte à côte ?
3. Soit $r \geq k$. Avec quelle probabilité tous les livres de l'auteur M sont-ils dans les r premiers livres de l'étagère ?
4. Soit $\ell \in \{k-2, \dots, n-2\}$. Quelle est la probabilité qu'il y ait ℓ livres entre le livre de l'auteur M qui se trouve le plus à gauche sur l'étagère et celui qui se trouve le plus à droite sur l'étagère ? Si $k = 2$, combien de livres est-il le plus probable de trouver entre les deux livres de l'auteur M sur l'étagère ?

Exercice 4. Soit un entier $n \geq 2$. On suppose que toutes les répartitions des sexes des enfants d'une famille à n enfants sont équiprobables. Les deux événements suivants sont-il indépendants :
- M : "la famille de n enfants a des enfants des deux sexes" ;
- F : "la famille de n enfants a au plus une fille" ?

Exercice 5. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On choisit au hasard un des entiers $1, 2, \dots, n$. Pour $k \in \{1, \dots, n\}$, on note A_k l'événement "le nombre choisi est divisible par k".

1. Calculer la probabilité de l'événement A_k lorsque k divise n.
2. Soit $p_1, \dots, p_\ell$ des nombres premiers distincts qui divisent n. Les événements $A_{p_1}, \dots, A_{p_\ell}$ forment-ils une famille d'événements indépendants ?

Exercice 6. Un couple a deux enfants. Dans la conversation, on apprend qu'au moins un des enfants est un garçon. Quelle est la probabilité que le couple ait deux garçons ?

Exercice 7. Un juge interroge séparément deux témoins qui ne se connaissent pas afin de savoir si un événement a eu lieu. On supposera que
- chaque témoin a une probabilité p d'affirmer que l'événement a eu lieu alors que cet événement n'a pas eu lieu ;
- chaque témoin a une probabilité q d'affirmer que l'événement n'a pas eu lieu alors que cet événement a eu lieu.

On note a la probabilité que cet événement ait lieu et on suppose que $a, p, q \in]0, 1[$.

1. Donner un espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ associé à cette expérience aléatoire.
2. Calculer la probabilité que l'affirmation du premier témoin soit fausse. Les événements "l'affirmation du premier témoin est fausse" et "l'affirmation du deuxième témoin est fausse" sont-ils indépendants ?
3. Quelle est la probabilité que l'événement ait eu lieu si les deux témoins affirment qu'il a eu lieu ?
4. Quelle est la probabilité que l'événement ait eu lieu si au moins un des deux témoins affirme qu'il a eu lieu ?

Exercice 8. Formule du crible.

1. Soient $A_1, ..., A_n$ des événements définis sur l'espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. Montrer que

$$\mathbb{P}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mathbb{P}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}).$$

2. Soient $A_1, ..., A_n$ des ensembles finis. En déduire que

$$\mathrm{Card}\left(\bigcup_{i=1}^{n} A_i\right) = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k-1} \sum_{1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n} \mathrm{Card}(A_{i_1} \cap \cdots \cap A_{i_k}).$$

3. *Application :* Pour fêter la nouvelle année, une société demande à chacun de ses membres d'apporter un cadeau. Tous les cadeaux sont mis ensemble. Ensuite, chaque cadeau est donné au hasard à l'un des membres de la société, l'idéal étant, bien sûr, qu'aucun membre ne reçoive son propre cadeau. Soit n le nombre de membres de la société.
   (a) Calculer la probabilité pour qu'un membre de la société, choisi à l'avance, reçoive son propre cadeau.
   (b) Calculer la probabilité p_n que la situation idéale se réalise. Calculer alors $\lim_{n \to \infty} p_n$.
   (c) Calculer la probabilité $p_n(k)$ pour que k personnes exactement reçoivent leur propre cadeau. Par quelle valeur peut-on approcher $p_n(k)$ lorsque n est très grand ?

Exercice 9. On considère un système de r particules pouvant être dans un des n niveaux d'énergie $e_1, \ldots, e_n$. On définit l'espace des états du système comme l'ensemble des configurations distinguables. On fait l'hypothèse que chaque configuration distinguable est équiprobable. On considère les trois cas suivants :
(i) *Statistique de Maxwell-Boltzmann.* Les r particules sont localisées et donc distinguables.
(ii) *Statistique de Bose-Einstein.* Les r particules sont indistinguables.
(iii) *Statistique de Fermi-Dirac.* Les r particules sont indistinguables et il y a au plus une particule par niveau d'énergie (on suppose que $n \geq r$).
Exemples de configurations dans le cas de 3 particules et deux états d'énergie : les figures 1 et 2 représentent deux configurations identiques pour le modèle (i) et (ii). Les figures 1 et 3 représentent des configurations distinguables dans le modèle (i) mais indistinguables dans le modèle (ii). Aucune de ces configurations ne sont possibles dans le modèle (iii).

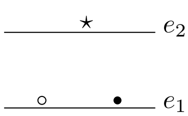

figure 1

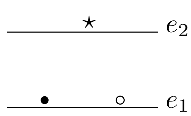

figure 2

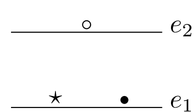

figure 3

1. Construire l'espace de probabilité correspondant à chacun des modèles (i), (ii), (iii).
2. L'état macroscopique du système est déterminé par les nombres r_i de particules dans l'état d'énergie e_i. On modélise l'espace des états macroscopiques par

$$\Omega_{ma} = \{(r_1, \ldots, r_n) \in \mathbb{N}^n, \text{ t.q. } r_1 + \cdots + r_n = r\}.$$

   Munir Ω_{ma} de la probabilité naturelle dans chacun des cas (i), (ii), (iii). Que peut-on dire dans les cas (ii) et (iii) ?
3. On note $p_{r,n}(k)$ la probabilité qu'un niveau d'énergie donné contienne exactement k particules. Calculer $p_{r,n}(k)$ dans chacun des trois cas (i), (ii) et (iii).
4. Pour chacun des trois modèles (i), (ii) et (iii), donner la limite p_k de $p_{r,n}(k)$ lorsque n et r tendent vers l'infini et le nombre moyen r/n de particules par niveau d'énergie tend vers une quantité fixée $\lambda > 0$ (pour le cas (iii), on supposera que $\lambda \leq 1$). Vérifier que l'on a toujours $\sum_{k=0}^{\infty} p_k = 1$.
5. Dans le modèle (i) puis dans le modèle (ii), déterminer le nombre de configurations distinguables dont au moins un niveau d'énergie est vide.

Remarque : L'hypothèse que les particules sont distinguables est l'hypothèse usuelle en mécanique classique, l'hypothèse contraire apparait en mécanique quantique : le modèle (ii) est par exemple utilisé avec les photons alors que le modèle (iii) est utilisé avec les électrons, protons, neutrons...

Feuille de TD n° 2

Exercice 1. Jean et Luc lancent chacun une pièce de monnaie qui a une probabilité p de tomber sur "face" jusqu'à ce que chacun obtienne une fois "face". On note X le nombre de "pile" obtenus par Jean la première fois où sa pièce tombe sur "face" et Y le nombre de "pile" obtenus par Luc la première fois où sa pièce tombe sur "face"

1. Déterminer les lois de X et de Y.
2. Déterminer la probabilité que Jean et Luc obtiennent "face" après le même nombre de lancers.
3. Déterminer les lois de $X+Y$ et de $\min(X,Y)$.

Exercice 2. On rappelle que toute fonction localement bornée $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant $f(x+y) = f(x) + f(y)$ pour tous réels x et y est nécessairement de la forme $f(x) = \lambda x$ pour un certain réel λ.

1. Déterminer la loi et l'espérance d'une variable aléatoire X à valeurs dans $\mathbb{N}$ qui vérifie
$$\forall (k,l) \in \mathbb{N}^2 \qquad \mathbb{P}(X \geq k) > 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{P}(X \geq k+l \mid X \geq k) = \mathbb{P}(X \geq l).$$
2. Soit Y une variable aléatoire strictement positive qui vérifie
$$\forall (s,t) \in (\mathbb{R}_+^*)^2 \qquad \mathbb{P}(Y \geq s) > 0 \quad \Longrightarrow \quad \mathbb{P}(Y \geq s+t \mid Y \geq s) = \mathbb{P}(Y \geq t). \tag{1}$$
Déterminer la loi de Y et son espérance. Que signifie (1) si Y modélise la durée de fonctionnement d'une machine ?
3. Montrer que $\mathbb{P}(Y \leq s+\varepsilon \mid Y > s)/\varepsilon$ converge lorsque $\varepsilon \to 0$ vers une limite que l'on déterminera.

Exercice 3. Jean, Luc et Marc entrent simultanément dans un bureau de poste qui dispose de deux guichets. Jean et Luc utilisent les deux guichets qui sont libres au moment de leur arrivée et Marc attend son tour. On note X, Y et Z les variables aléatoires donnant le temps que met un guichetier pour traiter les demandes de Jean, Luc et Marc respectivement. On suppose que ce sont des variables indépendantes et de loi exponentielle de paramètre $a > 0$.

1. Quelle est la probabilité pour que Marc ne quitte pas la poste le dernier ?
2. Déterminer la loi du temps T passé par Marc à la poste ainsi que son espérance.
3. Déterminer la loi du temps W nécessaire pour que les trois personnes soient servies.

Exercice 4. Soit X une variable aléatoire réelle définie sur l'espace $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$. On dit que m est une médiane pour X si $\mathbb{P}(X < m) \leq 1/2 \leq \mathbb{P}(X \leq m)$.

1. Pour $x_1 < \ldots < x_n$, déterminer les médianes de la loi uniforme sur l'ensemble $\{x_1, \ldots, x_n\}$.

Supposons que X admette un moment d'ordre 1 fini.

2. Montrer que si m est une médiane pour X alors $\mathbb{E}[|X-a|] \geq \mathbb{E}[|X-m|]$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.
3. Montrer que si m_1 et m_2 sont deux médianes pour X alors $\mathbb{E}[|X-m_1|] = \mathbb{E}[|X-m_2|]$.

Supposons que X admette un moment d'ordre 2 fini.

4. Montrer que $\mathbb{E}[(X-a)^2] \geq \mathrm{Var}(X)$ pour tout $a \in \mathbb{R}$.
5. Montrer que $\mathbb{E}[|X-m|] \leq \sigma(X)$ où $\sigma(X)$ désigne l'écart-type de X.

Exercice 5. Inégalité de Hoeffding. Soit X une variable aléatoire réelle telle que $a \leq X \leq b$, pour deux réels a et b, et soit $(X_1, \ldots, X_n)$ un n-échantillon de variables aléatoires de même loi que X. L'objectif de l'exercice est d'établir l'inégalité de Hoeffding suivante :

$$\forall \varepsilon > 0 \qquad \mathbb{P}\left(\left| \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i - \mathbb{E}(X) \right| \geq \varepsilon \right) \leq 2 \exp\left(-\frac{2n\varepsilon^2}{(b-a)^2} \right). \tag{2}$$

1. Soit Y une variable aléatoire telle que $0 \leq Y \leq 1$ et $(Y_1, \ldots, Y_n)$ un n-échantillon de variables aléatoires de même loi que Y. Notons $\mu = \mathbb{E}[Y]$ et $\overline{Y}_n = (Y_1 + \ldots + Y_n)/n$.
   (a) Montrer que $\mathbb{P}(\overline{Y}_n - \mu \geq \varepsilon) \leq \mathbb{E}[\exp(n\theta(\overline{Y}_n - (\mu+\varepsilon))]$ pour tous $\varepsilon > 0$ et $\theta > 0$.
   (b) En déduire que $\mathbb{P}(\overline{Y}_n - \mu \geq \varepsilon) \leq \mathrm{e}^{n(\lambda(\theta) - \theta(\mu+\varepsilon))}$ pour tous $\varepsilon > 0$ et $\theta > 0$, où $\lambda(\theta) = \log \mathbb{E}[\mathrm{e}^{\theta Y}]$.
   (c) Montrer que $\mathrm{Var}(Y) \leq 1/4$.

   (d) En calculant les deux premières dérivées de λ, montrer que $\lambda(\theta) \leq \theta\mu + \theta^2/8$ pour tout $\theta > 0$.
   (e) En déduire que $\mathbb{P}(\overline{Y}_n - \mu \geq \varepsilon) \leq \exp(-2n\varepsilon^2)$ pour tout $\varepsilon > 0$.
   (f) Montrer qu'on a aussi $\mathbb{P}(\overline{Y}_n - \mu \leq -\varepsilon) \leq \exp(-2n\varepsilon^2)$ pour tout $\varepsilon > 0$.
2. En déduire l'inégalité de Hoeffding (2).

Exercice 6. Méthode de simulation par inversion de la fonction de répartition. Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0,1[$. On pose pour $u \in]0,1[$,

$$F^{-1}(u) = \inf\{x \in \mathbb{R} \mid F(x) \geq u\}.$$

1. Montrer que pour $t \in \mathbb{R}$ et $u \in]0,1[$, on a $F^{-1}(u) \leq t \iff F(t) \geq u$. En déduire la loi de $Y = F^{-1}(U)$.
2. Déterminer la fonction F^{-1} dans les deux situations suivantes :
   (a) F est la fonction de répartition de la loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$.
   (b) F est la fonction de répartition de $\mu = \sum_{i=1}^n p_i \delta_{e_i}$ où $e_1 < \ldots < e_n$ et $p_1, \ldots, p_n > 0$ avec $\sum_{i=1}^n p_i = 1$.
3. Soit μ une probabilité sur un ensemble fini quelconque $E = \{e_1, \ldots, e_n\}$. Pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, posons $q_i = \sum_{j=1}^i \mu(\{e_j\})$. On suppose que l'on dispose d'une fonction `rand` qui vérifie les deux propriétés suivantes :
   (i) un appel à la fonction `rand` donne une réalisation d'une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0,1[$.
   (ii) les appels successifs à la fonction `rand` fournissent une réalisation d'une suite de variables aléatoires indépendantes de loi uniforme sur $]0,1[$.
   Montrer que l'algorithme ci-dessous permet de simuler une réalisation d'une variable aléatoire de loi μ et déterminer le nombre moyen de comparaisons effectué par cet algorithme :
   $u \leftarrow$ `rand`
   $i \leftarrow 1$
   `Tant que` $u > q_i$
   $i \leftarrow i + 1$
   `FinTantque`
   $X \leftarrow e_i$
   Comment numéroter les éléments de l'ensemble E pour minimiser le nombre moyen de comparaisons ?

Exercice 7. Soit X une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$.

1. Déterminer la loi de $Y = \lfloor X \rfloor$, la partie entière de X, puis la loi de sa partie fractionnaire $Z = X - \lfloor X \rfloor$.
2. Ces variables aléatoires sont-elles indépendantes ?
3. Par quelle loi peut-on approcher la loi de Z lorsque λ est très petit ?

Feuille de TD n° 3

Exercice 1. Soit X et X_n, pour $n \in \mathbb{N}$, des variables aléatoires définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$. On pose $\phi(x) = x/(x+1)$ pour tout $x \geq 0$. Montrer que la suite $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge en probabilité vers X si et seulement si $\mathbb{E}[\phi(|X_n - X|)]$ tend vers 0 lorsque n tend vers $+\infty$.

Exercice 2. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles possédant des variances finies. On pose $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. On dit que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ satisfait à la loi faible des grands nombres si pour tout $\varepsilon > 0$, $\lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(|\frac{S_n - \mathbb{E}[S_n]}{n}| \geq \varepsilon) = 0$. Montrer que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ vérifie la loi faible des grands nombres si :

1. la suite $(\mathrm{Var}(X_n))_{n\geq 1}$ est bornée et pour tout $n \geq 1$, X_n dépend de X_{n-1} et de X_{n+1}, mais est indépendante des autres X_k ;
2. pour tous i et k, $\mathrm{Cov}(X_{k+i}, X_i) = \mathrm{Cov}(X_{k+1}, X_1)$ et de plus $\lim_{n\to\infty} \mathrm{Cov}(X_n, X_1) = 0$.

Exercice 3. Théorème de Weierstrass. Soit f une fonction continue sur $[0,1]$. Soit $(X_i^{(x)})_{i\geq 1}$ une suite de variables de Bernoulli indépendantes de paramètre $x \in [0,1]$. On pose $S_n^{(x)} = \sum_{i=1}^n X_i^{(x)}$ et $P_n(x) = \mathbb{E}[f(\frac{S_n^{(x)}}{n})]$.

1. Montrer que $(P_n)_n$ converge uniformément vers f.
2. Expliciter la fonction P_n. En déduire que toute fonction continue sur un intervalle borné peut être approchée uniformément par des polynômes.

Exercice 4. Soit $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+$ une application d'intégrale finie non nulle. Notons $D_\phi = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid 0 < y < \phi(x)\}$.

1. Soit $Z = (X,Y)$ un vecteur aléatoire de loi uniforme sur D_ϕ. Déterminer la loi de X.
2. Trouver des fonctions ϕ pour lesquelles X et Y sont indépendantes et des fonctions ϕ pour lesquelles X et Y ne sont pas indépendantes.
3. Soit W une variable aléatoire dont la loi a pour densité $f = \frac{\phi}{\int_\mathbb{R} \phi(u)du}$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Soit U une variable aléatoire de loi uniforme sur $]0,1[$ indépendante de W. Déterminer la loi de $(W, U\phi(W))$.

Exercice 5. Méthode de simulation par acceptation-rejet. Soit μ une loi de probabilité sur un espace mesurable $(E, \mathcal{E})$ et $D \in \mathcal{E}$ tel que $\mu(D) > 0$. Soit $(X_i)_{i\in\mathbb{N}^*}$ un échantillon (c'est-à-dire une suite de variables aléatoires i.i.d.) de loi μ. Notons $T_D = \inf\{i \in \mathbb{N}^*,\ X_i \in D\}$.

1. Montrer que X_{T_D} est une variable aléatoire de loi $\mu_{|D}(\cdot) = \frac{\mu(\cdot \cap D)}{\mu(D)}$ indépendante de T_D.
2. Quelle est la loi de T_D ? Quelle est l'espérance de T_D ?
3. Déterminer la loi de X_{T_D} si μ est la loi uniforme sur un ensemble $A \in \mathcal{E}$ contenant D.
4. Soit Y une variable aléatoire prenant ses valeurs dans un intervalle compact $[a,b]$ et admettant une densité h bornée par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. En utilisant les résultats de l'exercice 4 et ce qui précède, donner une méthode pour simuler une réalisation de la variable aléatoire Y.

Exercice 6. Soit W une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre $1/2$ et V une variable aléatoire indépendante de W de loi uniforme sur l'intervalle $]0, 2\pi[$. On pose $X = \sqrt{W}\cos(V)$ et $Y = \sqrt{W}\sin(V)$.

1. Déterminer la loi de $\cos(V)$.
2. Déterminer la loi du couple (X,Y).
3. Quelles sont les lois des marginales X et Y ? Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?
4. Déterminer la loi de X/Y

Exercice 7. On appelle loi Gamma de paramètres $a > 0$ et $b > 0$ (notée $\Gamma(a,b)$) la loi dont la densité est donnée par la fonction :

$$x \mapsto \frac{b^a}{\gamma(a)} x^{a-1} \exp(-bx) \mathbb{1}_{\{x\geq 0\}} \qquad \text{où} \qquad \gamma(a) = \int_0^{+\infty} t^{a-1}\exp(-t)dt.$$

1. Vérifier qu'il s'agit bien d'une densité de probabilité. Déterminer l'espérance et la variance de cette loi.
2. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi $\Gamma(a,\lambda)$ et $\Gamma(b,\lambda)$. On pose $U = X + Y$ et $V = \frac{X}{X+Y}$. Déterminer la loi du couple (U,V) ainsi que les lois de U et de V. Les variables U et V sont-elles indépendantes ?
3. Déterminer l'espérance et la variance de V.

Exercice 8. Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ définie par

$$f(x,y) = \frac{\sqrt{1-\rho^2}}{2\pi} \exp\left(-\frac{1}{2}(x^2 - 2\rho xy + y^2)\right).$$

où ρ est une constante vérifiant $-1 < \rho < 1$.

1. Montrer que f est une densité.

Soit (X,Y) un couple de variables aléatoires qui a pour densité f.

2. Déterminer la loi de chacune des variables aléatoires X et Y et donner leurs moyennes et variances.
3. Déterminer la covariance entre X et Y.
4. Les variables aléatoires X et Y sont-elles indépendantes ?

Exercice 9.

1. Un poste de radio fonctionne avec une pile de 3V. On note T la durée (en heures) de fonctionnement d'une telle pile de marque M. On suppose que T suit une loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$. Le poste de radio est mis en marche avec une pile neuve à l'instant 0. Lorsque le poste est en panne, on remplace la pile par une pile de la même marque. On note S_n la durée de fonctionnement du poste de radio si on dispose de n piles.
   (a) Quelle est la loi de S_n (on explicitera les hypothèses faites) ?
   (b) Soit $t > 0$. On note N_t le nombre de piles utilisées pendant les t premières heures de fonctionnement de la radio. Déterminer la loi de N_t.
2. On considère maintenant un poste de radio qui fonctionne avec 2 piles de $1,5$V. On suppose que la loi de la durée de fonctionnement des piles de $1,5$V de marque M est la loi exponentielle de paramètre $a > 0$. Quelle la loi de la durée de fonctionnement de ce poste de radio si on dispose de deux piles ?

Feuille de TD n° 4

Exercice 1. Montrer que la loi $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$ converge étroitement vers δ_0 lorsque $\sigma \to 0$.

Exercice 2. Soit $(X_n)_{n\geq 0}$ une suite de variables aléatoires réelles. Montrer que $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en loi vers une constante a si et seulement si $(X_n)_{n\geq 0}$ converge en probabilité vers a.

Exercice 3. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles indépendantes de loi exponentielle de paramètre 1. Pour tout entier $n \geq 1$, soit $M_n = \max\{X_1, \dots, X_n\}$ et $Z_n = \frac{1}{\ln(n)} M_n$.

1. Montrer que $(Z_n)_{n\geq 1}$ converge en probabilité vers 1.
2. Montrer que $(M_n - \ln(n))_{n\geq 1}$ converge en loi lorsque $n \to \infty$ vers une loi que l'on déterminera.

Exercice 4. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on note X_n une variable aléatoire réelle ayant une densité f_n par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. On suppose que la suite $(f_n)_n$ converge vers une densité f en presque tout point.

1. Montrer que $\int_{\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| dx \to 0$. *Indication :* On pourra utiliser la décomposition $|a-b| = a+b-2\min(a,b)$.
2. Montrer que $(X_n)_n$ converge en loi vers la loi de densité f.
3. Soit μ_n une loi de densité $f_n(x) = (1-\cos(2\pi n x))\mathbb{1}_{\{x\in[0,1]\}}$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. La suite $(\mu_n)_n$ converge-t-elle étroitement ? Soit $x \in]0,1[$, la suite $(f_n(x))_n$ converge-t-elle ?

Exercice 5. Soit X une variable aléatoire de loi de Laplace de paramètre 1, c'est-à-dire ayant pour densité $x \mapsto e^{-|x|}/2$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que X a pour fonction caractéristique $t \mapsto \frac{1}{1+t^2}$.
2. Soit Y une variable aléatoire de loi de Cauchy de densité $x \mapsto \frac{1}{\pi(1+x^2)}$ par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$. Déduire de la question précédente que Y a pour fonction caractéristique $t \mapsto e^{-|t|}$.
3. Soit Z une variable aléatoire indépendante de Y et de même loi. Pour $a > 0$ et $b > 0$ déterminer la loi de $aY + bZ$.
4. Soit $Y_1, \dots, Y_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes et de même loi que Y. Quelle est la loi de $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i$? Pourquoi ce résultat ne contredit-il pas la loi des grands nombres ?

Exercice 6. Soit $(X_n)_n$ et $(Y_n)_n$ deux suites de variables aléatoires qui convergent en loi respectivement vers μ et ν. On suppose que pour tout n, les variables X_n et Y_n sont indépendantes. Montrer que la suite des couples (X_n, Y_n) converge en loi. Exprimer la loi limite en fonction de μ et ν.

Exercice 7. Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires réelles i.i.d. de carré intégrable. On pose $\overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i$. Que peut-on dire de la limite de $\sqrt{n}(\overline{X}_n - m)$ si m est une constante différente de $\mathbb{E}[X_1]$?

Exercice 8. Soit X_a une variable aléatoire de loi de Poisson $\mathcal{P}(a)$.

1. Déterminer la fonction caractéristique de X_a.
2. Montrer que $Z_a = \frac{1}{\sqrt{a}}(X_a - a)$ converge en loi vers la loi $\mathcal{N}(0,1)$ lorsque $a \to \infty$.
3. Montrer que la suite $(\mathbb{E}[Z_n^-])_n$ converge.
4. Calculer $\mathbb{E}[Z_n^-]$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.
5. Retrouver à partir des questions précédentes la formule de Stirling.

Feuille de TD n° 5

Exercice 1. Soit $\rho \in [-1, 1]$. Soit $Z = (X, Y)$ un vecteur aléatoire gaussien d'espérance 0 et de matrice de covariance $\Gamma = \begin{pmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{pmatrix}$. Déterminer la loi du vecteur $W = (X + Y, X - Y)$ et les lois des marginales $X + Y$ et $X - Y$.

Exercice 2. Soit $\Gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ une matrice réelle.

1. À quelles conditions sur a, b, c et d, la matrice Γ est-elle la matrice de covariance d'un vecteur aléatoire gaussien ?
2. On suppose que la matrice Γ est la matrice de covariance d'un vecteur aléatoire gaussien. Soit X et Y deux variables aléatoires indépendantes de loi $\mathcal{N}(0, 1)$.
   (a) Construire à l'aide de X et Y un vecteur aléatoire gaussien Z de matrice de covariance Γ.
   (b) À quelles conditions sur a, b, c et d, le vecteur Z admet-il une densité par rapport à la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^2$?
   (c) A quelles conditions sur a, b, c et d, les marginales de Z sont-elles indépendantes ?

Exercice 3. Une molécule formée d'une longue chaîne plane d'atomes identiques est modélisée de la façon suivante. Les atomes sont positionnés en des points $A_1, \ldots, A_n$ d'un même plan ; deux atomes consécutifs positionnés en A_i et A_{i+1} sont à une distance ϵ et la direction du vecteur $\overrightarrow{A_iA_{i+1}}$ est une variable aléatoire de loi uniforme sur l'ensemble des directions possibles du plan et indépendante des directions des autres vecteurs $\overrightarrow{A_jA_{j+1}}$.

1. Quelle est la loi approchée du vecteur $\overrightarrow{A_1A_n}$?
2. En déduire la loi approchée du carré de la distance entre le premier atome et le dernier atome de la chaîne.

Exercice 4. On suppose que le signal reçu par un radar est $X = \theta S + \epsilon$ où ϵ est une variable de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, $S > 0$ et où $\theta = 1$ si un objet volant a été détecté dans la zone couverte par le radar et $\theta = 0$ si aucun objet n'a été détecté. Construire un test pour décider si un objet volant est dans la zone couverte par le radar au vu d'une observation de X de sorte que la probabilité de "fausse alarme" soit de 10^{-6}. On donnera aussi la puissance de ce test en fonction de S et de σ^2.

Exercice 5. On dispose de deux traitements médicaux A et B. On a obtenu 60 guérisons sur 100 cas pour le traitement A et 70 guérisons sur 100 cas pour le traitement B. On aimerait tester s'il y a une différence de résultats entre les deux traitements. Notons p_A (resp. p_B) la probabilité qu'un patient suivant le traitement A (resp. B) guérisse et notons $S_{n,A}$ (resp. $S_{n,B}$) le nombre d'individus guéris sur n individus qui suivent le traitement A (resp. B). On effectue un test de l'hypothèse $H_0 : p_A = p_B$ contre $H_1 : p_A \neq p_B$ au niveau 5%.

1. Par quelle loi peut-on approcher la loi de $\frac{1}{\sqrt{n}}(S_{n,A} - S_{n,B})$ sous l'hypothèse H_0 lorsque n est grand ?
2. On pose $U_n = \frac{1}{2n}(S_{n,A} + S_{n,B})$. Que peut-on dire de la loi de U_n lorsque n tend vers $+\infty$?
3. On choisit comme zone de rejet de H_0 une zone de la forme :
$$\mathcal{R}_n = \{|S_{n,A} - S_{n,B}| \geq q\sqrt{2nU_n(1 - U_n)}\}$$
   Comment choisir le réel q pour que $P_{H_0}(\mathcal{R}_n)$ tende vers 0.05 lorsque n tend vers $+\infty$?
4. Que peut-on dire de la puissance de ce test en une valeur de $p_B - p_A \neq 0$ fixée lorsque n tend vers $+\infty$?
5. Appliquer ce test aux données.

Exercice 6.

1. Construire un test d'ajustement du χ^2 à la loi $p_0\delta_{x_0} + p_1\delta_{x_1}$ où x_0 et x_1 sont deux valeurs distinctes, p_0 et p_1 sont deux réels positifs de somme 1.
2. *Application :* Le bureau de la statistique du gouvernement du Quebec a dénombré 84579 nouveau-nés dans la province en 1986. De ce nombre, 43220 étaient des garçons et 41359 des filles. Tester si la probabilité d'avoir un garçon est la même que la probabilité d'avoir une fille.
3. Donner un intervalle de confiance pour la probabilité d'avoir une fille de niveau de confiance asymptotique 95%.

Exercice 7. Le couvert végétal du domaine vital d'un élan d'Amérique se composait de peuplements feuillus ($25,8\%$ de la superficie du domaine vital), de peuplements mixtes (38% de la superficie), de peuplements résineux ($25,8\%$ de la superficie) et d'un marécage ($10,4\%$ de la superficie). Dans ce domaine, l'élan fut localisé à 511 reprises au cours de l'année. Sur 511 localisations, 118 se situaient dans les feuillus, 201 dans les peuplements mixtes, 110 dans les résineux et 82 dans le marécage. L'élan fréquente-t-il indifféremment les quatre types de végétation de son domaine vital ?

Exercice 8. On suppose que la durée de vie des piles d'une fabrique donnée suit une loi exponentielle de paramètre $\theta > 0$ inconnu. On dispose de $n \geq 1$ ampoules neuves provenant de cette fabrique. On note $\tau_1, \ldots, \tau_n$ les durées de vie respectives de ces ampoules et on les supposera indépendantes. On note $T_n = \sum_{i=1}^{n} \tau_i$.

1. Déterminer la loi de T_n.
2. Montrer que $(\frac{n}{T_n})_n$ converge en probabilité vers θ.
3. Montrer que $\sqrt{n}(\frac{\theta T_n}{n} - 1)$ converge en loi vers une loi que l'on déterminera.
4. En déduire un intervalle de confiance asymptotique de niveau de confiance 95% pour θ à l'aide de T_n.
5. Une entreprise a acheté un lot de 20 piles identiques ; le fabriquant garantit une durée de fonctionnement moyen de 10 heures pour ces piles. Si la durée de fonctionnement moyenne de ce lot est de 9 h 30, peut-on avec un risque de se tromper inférieur à 5 % remettre en cause l'affirmation du fabriquant ?
6. Dès que la pile de la pendule du hall d'une gare tombe en panne, elle est remplacée par une pile de la même marque. Soit $t > 0$. On note N_t le nombre de remplacements effectués pendant les t premières heures. Déterminer la loi de N_t.